

JURO QUE É SIMPLES!

**Matemática financeira para analistas,
peritos, assistentes técnicos e operadores jurídicos**

Análise financeira de contratos de empréstimo e financiamento

Prova do anatocismo na Tabela Price

1ª edição revista e ampliada

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Hübbe Pacheco, Alceu André

Juro que é simples! Matemática financeira para analistas, peritos, assistentes técnicos e operadores jurídicos. Análise financeira de contratos de empréstimo e financiamento. Prova do anatocismo na Tabela Price. Araranguá, SC: 2020, 1ª edição revista e ampliada. 264 p.

Direitos autorais protegidos pela lei nº 9610/98.

Autor: Alceu André Hübbe Pacheco

Capa e Ilustrações: Ricardo Dal Pont

Diagramador: Alex Sander da Silva

1ª edição revista e ampliada - 11/2020 – Araranguá - SC

ALCEU ANDRÉ HÜBBE PACHECO

JURO QUE É SIMPLES!

**Matemática financeira para analistas,
peritos, assistentes técnicos e operadores jurídicos**

Análise financeira de contratos de empréstimo e financiamento

Capitalização de juros, simples e compostos.

Periodicidades diária, mensal, anual.

Amortização de empréstimos e financiamentos.

Séries uniformes de pagamentos postecipados, sem carência.

Método SimpComp ou Pacheco González.

Método Simplex ou MQJS.

Prova do anatocismo na Tabela Price

**“As ciências só têm valor quando nos ajudam na vida –
e é para isso que existem.”
(Monteiro Lobato)**

1ª edição revista e ampliada

Araranguá – SC

Edição do autor

2020

AGRADECIMENTOS

Minha gratidão a tudo e todos que contribuíram com este momento. Pelo exemplo, apoio, inspiração, incentivo, solidariedade, compreensão, paciência, consolo, desafio, motivação, oportunidade.

À vida. À possibilidade de aprender, sempre, muito, mais e melhor.

À minha esposa Maristela. Aos meus filhos, André Gabriel e Angélica.

Aos meus irmãos, Cláudio José (*in memoriam*), meu primeiro orientador profissional; e José Carlos (*in memoriam*), pelo exemplo de abnegação.

Aos meus ascendentes, amigos, mestres, alunos, escritores, parceiros, clientes, juízes, serventuários, partes nos processos, assistentes técnicos, peritos e instrutores.

Wilson Araújo Rosa (*in memoriam*). Sidney Bianchi Savi. Gabriel González Bochetti (*in memoriam*).

Pedro Aujor Furtado Júnior; Gustavo Santos Mottola, Júlio César Machado Ferreira de Mello, Julio César Corrêa Burigo, Edilson Aguiaris, Giovani Elias, André Luiz Dias de Mello, Edio Kunhasky Júnior, Vanderlei Freitas Júnior, Manoel Donisete de Sousa, Vagner Freitas, Willy Sommer, Thiago Anselmo Florencio, Carlos Eduardo Albrecht Garbero, Renato Feijó.

Ligia Boettger Mottola, Rafael Steffen da Luz Fontes, Marcelo Pizzolatti, Guilherme Mattei Borsoi, Felipe Ambrosio, Celso Henrique de Castro Baptista Vallim, Sérgio Renato Domingos, Ricardo Machado de Andrade, Pablo Vinicius Araldi, Débora Driwin Rieger Zanini, Giancarlo Bremer Nones, Evandro Volmar Rizzo, Marlon Jesus Soares de Sousa, Osmar Mohr, Brigitte Remor de Souza May, Liana Bardini Alves, Alessandra Meneghetti, Rafael Milanesi Spillere, Livia Borges Zwetsch Beck, Marciano Donato, Marcio Schiefler Fontes, Edir Josias Silveira Beck, Luiz Paulo Dal Pont Lodetti, Ezequiel Rodrigo Garcia, Cleny Serly Rauen Vieira, Fabiano Antunes da Silva, Gilberto Kilian dos Anjos, Giuliano Ziembowicz, Juliano Rafael Bogo, Karen Guollo, Marcelo Carlin.

Maurício Maffei Teixeira, Valdinei Freitas, Alberti Scarabelot, Jaison Gabriel, Juliane Schmidt de Abreu Nones, Francielly Eccel, Cristiane Aparecida Schmoller, Hallan Bruner Farias, Stefan Leonardo Vön Müllen, Vanessa Valeriano, Marcelo Vitto Bongioio, Criseli Ramos Margutti, Fábio Rovaris, Marcelo Kestering Medeiros, Sandra Maria Pavei Gabriel, Karina Schmidt Pereira Dias, Geisilane Costa de Matos de Araujo, Giovani Vasconcelos Pereira (*in memoriam*).

Heloísa Veiga de Assis, Cristina Zeferino da Rocha, Eduardo Ribeiro Manenti, Roberto Schroeder, Rodolfo Evandro Pacheco Zattar, Marcos Baysterstoff, Patrícia Simon Ribas, Gabriele Gil Gomes, Valdecir Figueiredo, Márcio Rodrigues, Ederson Gobatto, Adriana Köthe, Ana Cristina Mendes.

Aos que se negaram a debater ou esclarecer, e aos que divergiram, porque me instigaram a aprofundar os estudos.

APRESENTAÇÃO

*“Um músico deve compor;
um artista deve pintar;
um poeta deve escrever,
caso pretendam deixar seu coração em paz.
O que um homem pode ser, ele deve ser.
A essa necessidade podemos dar o nome de
AUTO-REALIZAÇÃO”.*
Abraham Maslow

Há mais de 20 anos, em razão das inúmeras e ricas experiências vividas nesta área, eu tinha o propósito de contribuir para o aprendizado e conhecimento de quem se interessa, depende, estuda e trabalha com Matemática Financeira.

No âmbito do Poder Judiciário, o tema mais recorrente, nas demandas que têm por objeto a revisão de contratos de financiamento, certamente é a capitalização de juros, simples e compostos, e seu expurgo ou manutenção.

Observei, ao longo do tempo, que a maioria da literatura sobre o tema repete conceitos e fórmulas clássicas, sem enfrentar abertamente as questões de fundo, no que tange à realidade fática dos contratos submetidos ao crivo do Judiciário.

Recentemente, renomados e valorosos autores nos brindaram com obras esclarecedoras, lançando luzes sobre o assunto.

O presente estudo pretende consolidar esses ensinamentos; e evoluir, da **forma mais acessível e concisa**.

O texto não se estende a elementos básicos de Matemática Financeira, nem a exercícios propostos ou resolvidos, de operações simples, que podem ser encontrados em inúmeras obras tradicionais, já publicadas.

Os principais temas abordados são: desenvolvimento algébrico de fluxo de caixa para obtenção do valor futuro, a juros simples e/ou juros compostos; caminho inverso, para obter o valor presente e a taxa de juros; cálculo algébrico da **prestação periódica de valor fixo**; capitalização de juros nas periodicidades diária, mensal e anual; amortização dos empréstimos à luz das progressões aritméticas e geométricas; expurgo do anatocismo; comparativo do custo efetivo entre sistemas de amortização.

De modo especial, é apresentado o inédito Método SimpComp ou Pacheco González para cálculo das prestações periódicas, séries uniformes, postecipadas, sem carência, sob juros capitalizados **anualmente**.

Também, de forma inédita, é apresentada a conversão dos financiamentos com capitalização diária, de juros compostos para juros simples.

A capitalização diária tem sido largamente utilizada nos últimos tempos, e a literatura existente contém meras referências ao assunto, sem qualquer aprofundamento do tema.

Outra ousada inovação é o cálculo das cotas de juros e de amortização contidas em cada prestação periódica, além dos saldos devedores intermediários, todas estas verbas pelo seu valor real e efetivo, através da equivalência de fluxos de caixa, em especial sob o regime de juros simples, o método SIMPLEX ou de Quitação a Juros Simples.

Finalmente há a demonstração da existência de anatocismo ou capitalização composta de juros na Tabela Price.

O livro se destina a aprendizes e mestres, analistas financeiros, sejam financiadores ou mutuários, alunos ou professores; e, também, aos operadores do Direito - juízes, advogados, servidores, peritos, partes e assistentes técnicos -, em especial para aplicação nos processos em que são debatidos os temas retro referidos, mormente os milhares que se encontram em fase de liquidação e/ou cumprimento de sentença.

Eis, agora, o resultado, que fica submetido à análise e às considerações de todos aqueles e aquelas que vierem a ter acesso, as quais serão muito bem-vindas.

O objetivo é obter êxito na comunicação do conteúdo. A satisfação será contribuir efetivamente com os leitores e receber *feedback*, em um círculo virtuoso de aprendizado conjunto.

A realização virá, na medida em que este estudo se torne referencial seguro e consistente de soluções para questões equivalentes.

A Matemática é ciência exata, e não aceita quimeras.

A Matemática Financeira não contempla achismos.

Apesar do conteúdo demandar muitas horas de teoria e prática, e envolver alguma complexidade, nada ou pouco complicada, pode ser bem e facilmente assimilado.

Um pouco de esforço, atenção, boa vontade e desapego às “verdades prontas” serão suficientes para demonstrar que nem tudo é tão difícil como aparenta ser. Mediante visão sistêmica e adequado equacionamento dos problemas, o aprendizado pode ser simples, embora composto de muitos elementos e variáveis.

Não é tão fácil, mas ***JURO QUE É SIMPLES!***

PREFÁCIO DA 1ª EDIÇÃO

Conhecendo a capacidade do Alceu, fiquei muito feliz quando tomei conhecimento de que ele escreveria um livro sobre análise financeira de contratos de financiamento, e especialmente honrado quando ele me convidou para redigir o prefácio.

Escrever um livro não é tarefa fácil.

Ela exige paixão pelo tema; coragem para se expor a críticas dos leitores; renúncia a outras atividades que poderiam ser realizadas no tempo consumido pela tarefa; desejo de compartilhar conhecimento.

Quando o autor reúne todas estas qualidades, o resultado não pode ser outro: uma obra que merece ser lida.

É o que acontece com o presente livro.

Por meio dele, o autor aborda um conteúdo de grande importância nas ações judiciais: os juros.

Existe muita confusão no meio jurídico sobre o tema porque os operadores do Direito nem sempre possuem familiaridade com a matemática. Tornam-se, por consequência, reféns de afirmações que nem sempre se confirmam quando postas à prova.

Se o Direito permite interpretação, a matemática como regra não. Qualquer profissional pode tentar explicar um método de cálculo ou expor conclusões sobre ele. Mas, no final, a matemática não mente: ou o resultado confirma a afirmação ou não. E o autor, durante a obra, testa sistematicamente todas as afirmações que faz.

Aliás, o grande mérito do Alceu é a maneira simples com a qual ele faz tudo isso, possibilitando que mesmo os leitores sem tanta intimidade com a matemática possam entender o conteúdo e tirar suas próprias conclusões sobre aquilo que o autor defende.

Assim, convido a todos (em especial os operadores do Direito) a lerem este livro, mesmo que para isso tenham que deixar de lado alguma resistência para com a matemática que tenham criado na época da escola. Aqueles que assim o fizerem, quando encerrarem a leitura, certamente terão adquirido conhecimento suficiente para tratarem de juros simples e compostos e dos diversos métodos de cálculo com maior segurança porque, no fim, como diz o Alceu, “não é muito fácil, mas é simples”.

Gustavo Santos Mottola

Juiz de Direito

TJSC – Tribunal de Justiça de Santa Catarina

PREFÁCIO DA 1.^a EDIÇÃO REVISTA E AMPLIADA

O que é simples encanta. O que é simples traz consigo a verdade. O simples tem o poder de trazer o conhecimento e, mais do que isso, a transformação.

É claro que tem gente que gosta de complicar só para ganhar “ares de autoridade”, mas a autoridade só existe com a verdade. E não importa por quanto tempo essa verdade foi deixada de lado. É a verdade que nos move, que nos une, que nos fortalece.

Mas devo advertir que a verdade não é fácil de ser achada. É como qualquer metal precioso: é preciso cavar em busca desta verdade. Quanto mais esforço empreendido na busca da verdade, mais saborosa será a sua conquista. E o resultado dessa jornada em busca da verdade não deve ser escondido, mas antes divulgado a todos os povos. Sem soberba, sem atropelos, com singeleza. Enfim, de modo simples.

O papel do professor é exatamente esse: tornar simples tudo aquilo que ensina. É como se fosse um “toque de Midas” que, ao transmitir o conhecimento, transforma-o em ouro. É claro que neste processo é o professor quem mais aprende.

Entretanto, criar esse ambiente propício ao aprendizado exige muito daquele que irá ensinar, da sua paixão pelo assunto e por ensinar.

E o Alceu mostra que, quando se ama o que faz, não importa o tamanho do desafio. Não importa nem mesmo se essa “inverdade” foi dita milhares de vezes. Não importa se a maioria dos livros que manuseamos nas universidades deixaram o assunto de lado que, mesmo sendo simples, não é de fácil assimilação.

O desafio de lançar uma obra como essa era enorme porque, quando uma mentira é dita milhares de vezes, ela passa a se parecer com a verdade. Mas só se parece. Não é.

É como a sombra projetada de um objeto. Ao ver apenas a sombra, só se tem uma vaga ideia do que possa ser. Quanto mais se lança luz sobre aquele objeto, mais as visões vão se clareando, ganhando formas e contornos, até se tornar completamente visível.

É um processo. É uma jornada. E essa jornada se torna mais clara quando temos um guia, alguém que já alcançou a fonte, bebeu da água e retornou para nos mostrar o caminho. Tenho certeza de que em nenhum momento alguém pensou que seria fácil. Mas asseguro que é simples. E se torna ainda mais simples com as luzes que foram lançadas por este livro, agora revisto e ampliado.

Edilson Aguiais

Economista, advogado, perito, professor universitário e criador do IBCAPPA.

SUMÁRIO

Capítulo 1

INTRODUÇÃO17

Capítulo 2

CAPITALIZAÇÃO DE JUROS, SIMPLES OU COMPOSTOS23

Capítulo 3

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS27

Capítulo 4

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS31

Capítulo 5

REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO DE JUROS35

Capítulo 6

REGIME DE CAPITALIZAÇÃO POR JUROS COMPOSTOS (CJC)39

Capítulo 7

REGIME DE CAPITALIZAÇÃO POR JUROS SIMPLES (CJS)47

Capítulo 8

COMPARAÇÃO ENTRE JUROS SIMPLES E JUROS COMPOSTOS55

Capítulo 9

AMORTIZAÇÃO59

Capítulo 10

PRESTAÇÃO PERIÓDICA POR JUROS COMPOSTOS63

Capítulo 11

VALOR PRESENTE POR JUROS COMPOSTOS, A PARTIR DA PRESTAÇÃO71

Capítulo 12

PRESTAÇÃO PERIÓDICA POR JUROS SIMPLES75

Capítulo 13

PRESTAÇÃO A JUROS SIMPLES, COM BASE NO VALOR FUTURO85

Capítulo 14

VALOR PRESENTE A JUROS SIMPLES89

Capítulo 15

TAXA INTERNA DE RETORNO A JUROS SIMPLES93

Capítulo 16

AMORTIZAÇÃO E JURO NAS PRESTAÇÕES POR JUROS COMPOSTOS97

Capítulo 17

AMORTIZAÇÃO E JURO NAS PRESTAÇÕES POR JUROS SIMPLES	105
---	-----

Capítulo 18

PRESTAÇÃO PERIÓDICA E CAPITALIZAÇÃO DIÁRIA COMPOSTA	119
---	-----

Capítulo 19

PRESTAÇÃO PERIÓDICA E CAPITALIZAÇÃO DIÁRIA SIMPLES	129
--	-----

Capítulo 20

MÉTODO SIMPCOMP OU PACHECO-GONZÁLEZ (MPG)	139
---	-----

Capítulo 21

O INSTANTE “N” E OS SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO	155
---	-----

Capítulo 22

A PRESTAÇÃO PERFEITA	177
----------------------------	-----

Capítulo 23

MÉTODO DE QUITAÇÃO A JUROS COMPOSTOS (MQJC)	187
---	-----

Capítulo 24

MÉTODO SIMPLEX OU DE QUITAÇÃO A JUROS SIMPLES (MQJS)	195
--	-----

Capítulo 25

CAPITALIZAÇÃO SIMPLES DE JUROS EM SIMPLEX OU MQJS	207
---	-----

Capítulo 26

ANATOCISMO OU CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA DE JUROS EM PRICE	219
--	-----

Capítulo 27

A POLÊMICA SOBRE CAPITALIZAÇÃO DE JUROS, SIMPLES E COMPOSTOS	241
--	-----

Anexo 1

POSFÁCIO	253
----------------	-----

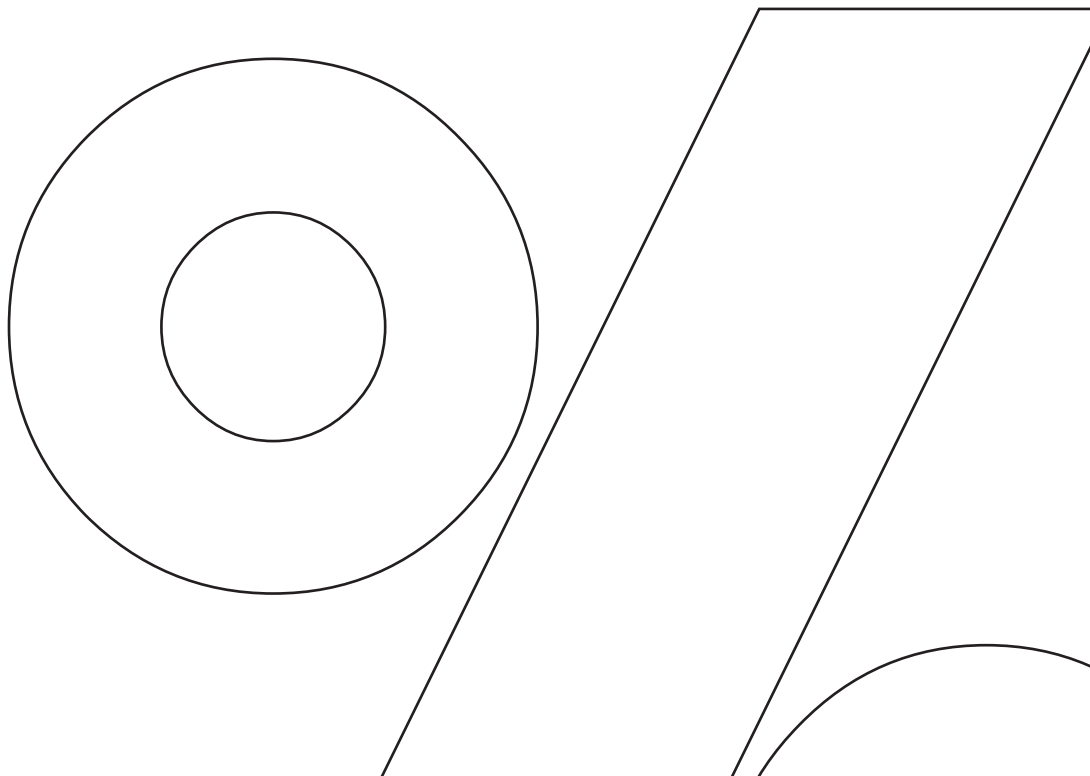
Anexo 2

BREVE CURRÍCULO	257
-----------------------	-----

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	261
----------------------------------	-----

CAPÍTULO 1

INTRO DUÇÃO



INTRODUÇÃO

“O objetivo da argumentação, ou do debate, não deve ser a vitória, mas o progresso”.

(Joseph Joubert)

A Matemática Financeira é um ramo da Matemática que, fundamental e essencialmente, estuda a evolução do valor do dinheiro e as relações existentes entre operações dos valores datados, ao longo de um determinado tempo.

A *lex mater* da Matemática Financeira contém cláusulas pétreas, que expressam princípios a ser mantidos e executados fielmente, sob a pena de ferir a lógica sob a qual foi desenvolvida esta disciplina.

Assim, uma das cláusulas pétreas da Matemática Financeira é a de que dois ou mais valores, só e exclusivamente, são iguais entre si, se tiverem o mesmo valor nominal e se referirem à mesma data focal.

“Tudo na vida depende da justa medida.”

(Monteiro Lobato)

Se os momentos forem diferentes, dois números de mesmo valor nominal não representam o mesmo valor efetivo.

Assim, somente podem ser processados ou comparados, algebricamente, os valores que estiverem situados na mesma data e sob a mesma taxa de juros.

Valores de datas diferentes devem, necessariamente, ser ajustados para o mesmo momento de tempo, sob pena de inadequação dos cálculos, prejuízo das análises e inconclusividade dos resultados obtidos.

Se observados em datas diferentes, o capital inicial (valor presente), os juros, e, por consequência, o montante (valor futuro), não serão as mesmas grandezas que expressam nominalmente.

Mais uma cláusula pétrea: em Matemática Financeira, as operações são procedidas sempre a partir do momento presente (data focal zero), para, então, serem determinados os eventos futuros.

Quando se contrata um financiamento, *na verdade está de fato sendo ajustado um aluguel de dinheiro, em função de uma operação financeira, por um período tempo determinado.*

Juro é a remuneração obtida a partir do capital financiado ou emprestado.

Para o tomador do empréstimo, o juro representa despesa financeira, custo, ônus; para o investidor, o juro significa rendimento, receita financeira, ganho, bônus.

Em essência, para se comparar o custo de determinadas operações financeiras, especialmente aquelas que contemplam diversos pagamentos ou recebimentos, é preciso elaborar a equivalência de fluxos de caixa, que é o encontro dos diversos valores envolvidos, na mesma data.

Até a década de 1970, a Matemática Financeira era ensinada e aprendida mediante desenvolvimento algébrico, sem a possibilidade de uso de calculadoras, mesmo as mais simples, que eram raridade, à época.

O desenvolvimento da tecnologia beneficiou a vida de todos, mas conduziu a uma acomodação quanto à necessidade de “raciocínio”.

Com o passar do tempo, calculadoras financeiras, computadores, planilhas eletrônicas, *software*, aplicativos e *sites* na internet facilitaram e, também, automatizaram os cálculos, de tal modo que os usuários destes equipamentos passaram a acreditar e confiar piamente nas máquinas.

Sem a exata compreensão da lógica dos cálculos e, assim, sem adequadas condições de questionar as “verdades prontas”, muitas vezes há dificuldade geral de entendimento ou explicação dos resultados obtidos, expressos em um único número ou valor, sem memorial descritivo dos procedimentos adotados.

A maior das dificuldades verificadas na Matemática Financeira ocorre principalmente em razão de incipiente base de Matemática pura.

Por isso, se esta for a situação, recomenda-se atualizar e consolidar o conhecimento e domínio das quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão; suas propriedades, regras e princípios); e, também, as operações de potenciação e radiciação, o equacionamento dos problemas, a construção algébrica e, de forma especial, os conceitos de progressão aritmética e geométrica.

A inteligência artificial está cada vez mais presente e evidente, em acelerada e irreversível evolução. Mas não há como prescindir da capacidade humana em atividades que exigem raciocínio, interpretação e bom senso.

Se não renunciar ao seu importante papel, o ser humano ainda e sempre prevalecerá.

Perícia pode ser paixão, mas também deve ser convicção. Conhecer as próprias limitações, e então estudar sempre e bastante para aprender alguma coisa.

Todo expert que se preze é indignado, pesquisador, insaciável, obstinado, questionador, perfeccionista, intrépido, cético, incrédulo, disciplinado, investigador, estudioso, dedicado, trabalhador.

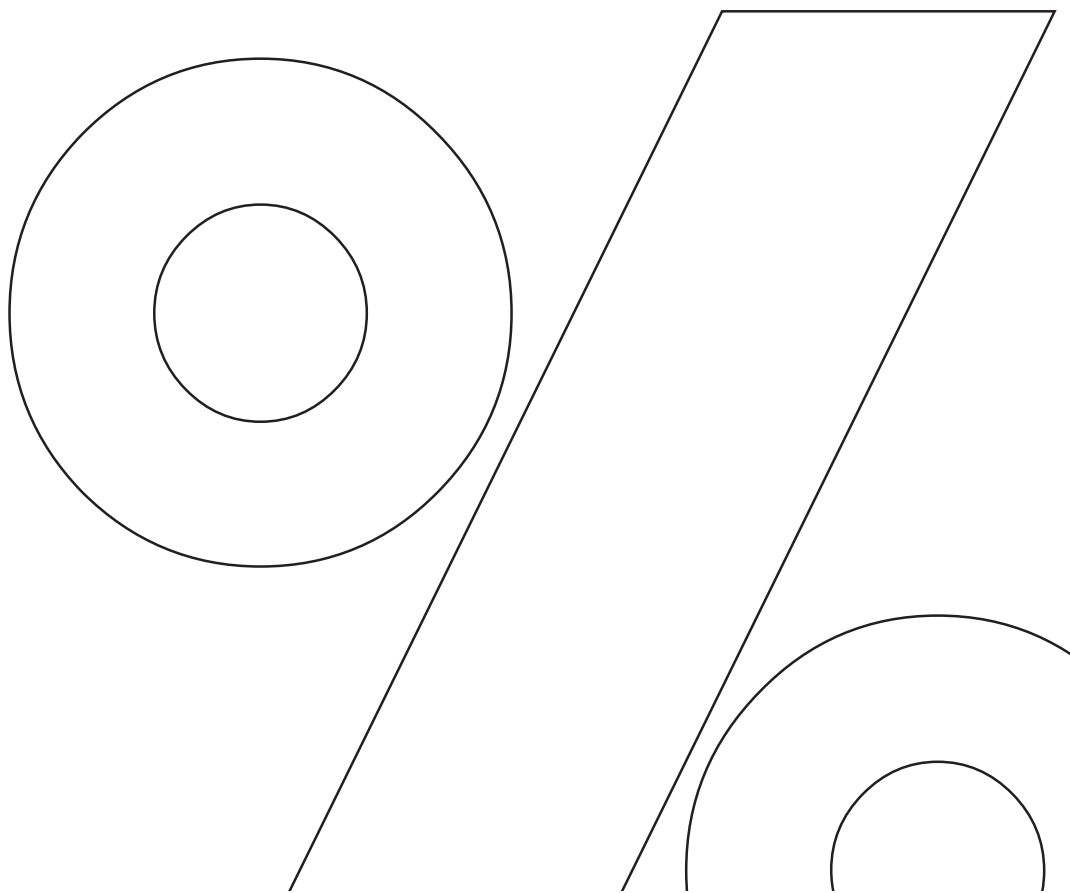
Dá asas à imaginação, mas tem a cabeça no lugar e os pés no chão. Navega em alto mar, mas tem a bússola sempre à mão, para retornar ao porto seguro. Não lhe basta o apito do juiz, pede o tira-teima do VAR. A mera radiografia é pouco, exige ressonância magnética. Tal como o personagem seu Saraiva, do saudoso Chico Anísio, gosta das coisas nos seus “mínimínimos” detalhes, em busca das verdades comprovadas.

Faz o trabalho do aprendiz de pedreiro, mas também o do mestre arquiteto. Só então terá a expertise e a excelência necessárias para que, percorrendo o círculo virtuoso do conhecimento, aprenda o bastante para que se possa dizer PERITO.

Não é fácil, dá muito trabalho, mas, se houver comprometimento e senso de justiça, eu JURO QUE É SIMPLES!

CAPÍTULO 2

CAPITALIZAÇÃO DE JUROS, SIMPLES OU COMPOSTOS



CAPITALIZAÇÃO DE JUROS, SIMPLES OU COMPOSTOS

Um dos temas mais recorrentes em debates sobre contratos de financiamento, inclusive objeto de incontáveis processos judiciais, é a incidência, ou não, de juros compostos, anatocismo, “capitalização de juros”, juros sobre juros, em especial na amortização através de *séries uniformes de pagamento*, ou seja, prestações de valor fixo, em determinado período, sob determinada taxa de juros, formado por intervalos de tempo com a mesma duração.

Constatada a incidência de juros compostos, muitas decisões transitadas em julgado determinaram o expurgo desta prática, mantidas as demais condições retro expostas, e determinaram a formulação de alternativa a juro simples ou “sem capitalização”.

Discorda-se desta última denominação, porque, embora na forma simples ou linear, os juros são sempre agregados ao capital inicial ou valor presente, para formar o montante ou valor futuro, a ser amortizado em uma ou diversas prestações.

Em fase de liquidação ou cumprimento de sentença, há enorme divergência quanto à melhor forma de executar o *decisum*.

Este estudo se propõe a oferecer solução sobre a controvérsia, mediante contribuição na evolução do aprendizado de tão relevante conteúdo, cujos reflexos influenciam significativamente o interesse de centenas de milhares de partes em processos judiciais.

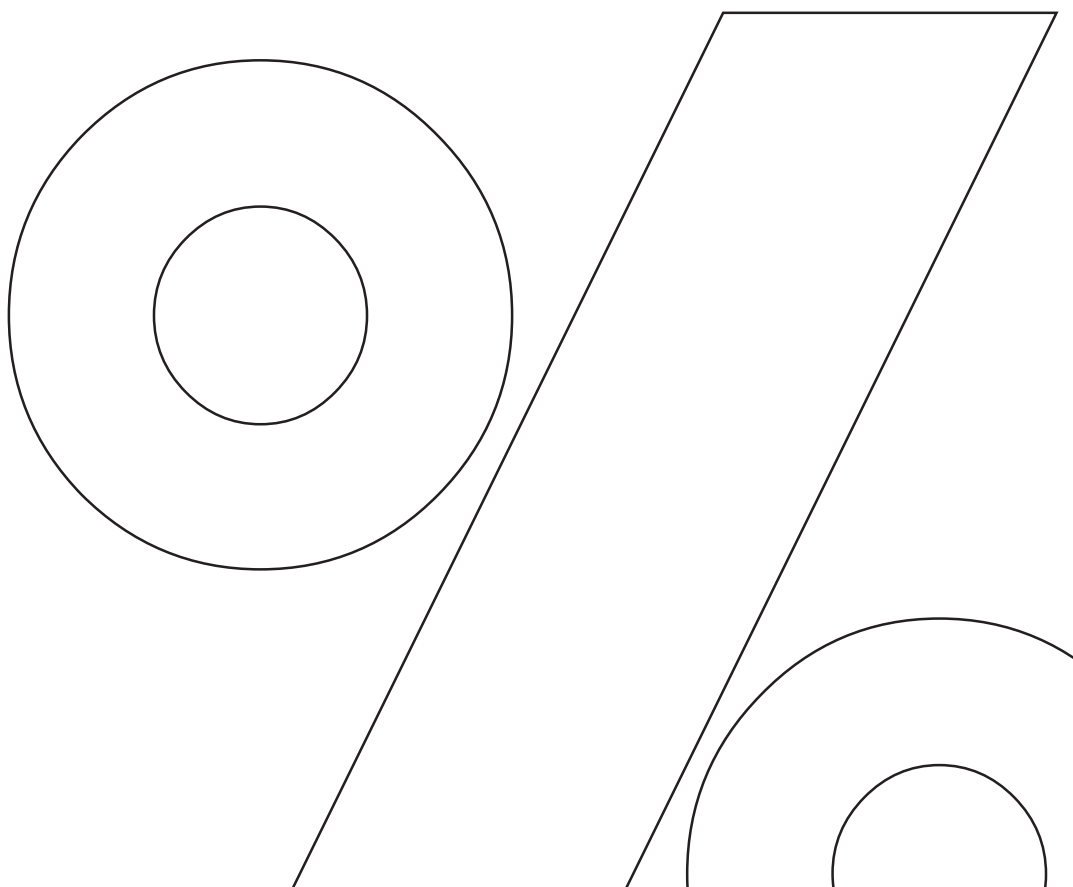
Abordar-se-á a capitalização de juros sob a forma composta e simples; mensal, anual e diária.

Inicialmente, antes de adentrar ao tema específico, faz-se necessário trazer à baila os conceitos de progressões aritméticas e geométricas, que serão determinantes na elucidação das questões pertinentes aos juros simples e juros compostos.

Assim, eliminam-se de vez as meias verdades, as mentiras inteiras ou as “verdades prontas”, sobre as quais muitos não admitem questionamento e se omitem de comprovar.

CAPÍTULO 3

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS



PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Progressão aritmética (PA) é uma sucessão de números, denominados termos (“a”), em que a diferença entre um termo qualquer, a partir do segundo, e o termo precedente, seja uma constante, que se denomina razão (r).

Razão é um número constante, não nulo, que aumenta ou diminui o próximo termo da PA.

A PA se forma mediante **adição** do termo do período imediatamente anterior (1 inteiro) com a própria razão, constituindo-se em sucessão de números tais que, cada um, a partir do segundo é igual ao precedente adicionado por um número relativo constante.

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots a_n - a_{n-1} = \dots = r$$

Cada termo da PA, a partir do segundo, é igual ao termo precedente mais a razão.

$$a_2 = a_1 + r; a_3 = a_2 + r; \dots ; a_n = a_{n-1} + r$$

Cada termo da PA, a partir do segundo, é a média aritmética entre o termo precedente e o seguinte.

Cada termo da PA é igual ao primeiro termo aumentado do produto da razão pelo número de termos que o precedem.

A fórmula do termo geral de uma PA é:

$$a_n = a_1 + [(n - 1) \cdot r]$$

Esta fórmula estabelece uma relação entre os quatro elementos de uma progressão aritmética: primeiro termo (a_1), termo de ordem (a_n), razão (r) e número de termos (n), de tal modo que, conhecidos três destes elementos, pode ser calculado o quarto.

A fórmula do primeiro termo de uma PA é:

$$a_1 = a_n - [(n - 1) \cdot r]$$

ou

$$a_n = a_1 \cdot \{ 1 + [r \cdot (n - 1)] \}$$

A fórmula da razão de uma PA é:

$$r = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$$

A fórmula do número de termos de uma PA é:

$$n = 1 + \left(\frac{a_n - a_1}{r} \right)$$

A soma dos termos de uma PA é:

$$S_{PA} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

ou

$$S_{PA} = n \cdot a_1 + \left(n \cdot \frac{n-1}{2} \right) \cdot r$$

Se o termo inicial de uma PA é 10.000, razão $r = 5\%$, número de termos = 8:

$$a_n = a_1 \cdot \{ 1 + [r \cdot (n - 1)] \}$$

$$a_n = 10.000 \times \{ 1 + [5\% \times (8 - 1)] \}$$

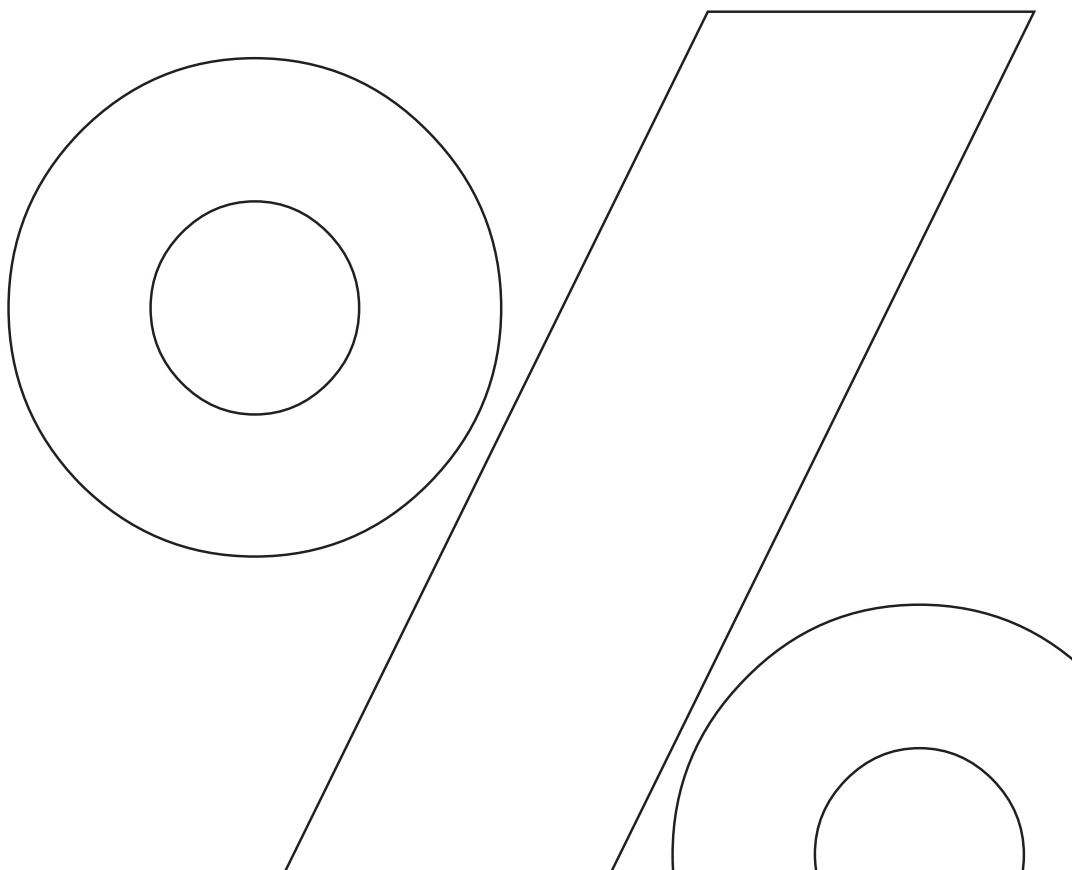
$$a_n = 10.000 \times [1 + (7 \cdot 5\%)]$$

$$a_n = 10.000 \times (1 + 35\%) = 10.000 \times (1 + 0,35) = 10.000 \times 1,35$$

$$a_n = 13.500$$

CAPÍTULO 4

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS



PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Progressão geométrica (PG) é uma sucessão de números, denominados termos (“a”), em que o quociente de cada termo, a partir do segundo, para o termo anterior, seja uma constante, que se denomina razão (q).

Razão é um número constante, não nulo, que aumenta ou diminui o próximo termo da PG.

A PG se forma mediante *multiplicação* do termo do período imediatamente anterior (1 inteiro) com a própria razão, constituindo-se em sucessão de números tais que, cada um, a partir do segundo é igual ao precedente multiplicado por um número relativo constante.

$$a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_{n-1} : a_n$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots = q$$

Cada termo da PG, a partir do segundo, é igual ao produto do termo precedente pela razão.

$$a_2 = a_1 \cdot q ; a_3 = a_2 \cdot q ; \dots ; a_n = a_{n-1} \cdot q$$

Cada termo da PG, a partir do segundo, é a média geométrica entre o termo precedente e o seguinte.

Cada termo da PG é igual ao produto do primeiro termo por uma potência da razão, cujo expoente é igual ao número de termos que o precedem.

A fórmula do termo geral de uma PG é:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

A fórmula do primeiro termo de uma PG é:

$$a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}$$

A fórmula da razão de uma PG é:

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

A soma dos termos de uma PG é:

$$S_{PG} = a_1 \cdot \frac{q^{n-1}}{q-1}$$

O produto dos termos de uma PG é:

$$P_{PG} = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Se o termo inicial de uma PG é 10.000, razão $q = 1 + 5\% = 1 + 0,05$, número de termos = 8.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = 10.000 \times (1 + 0,05)^{8-1}$$

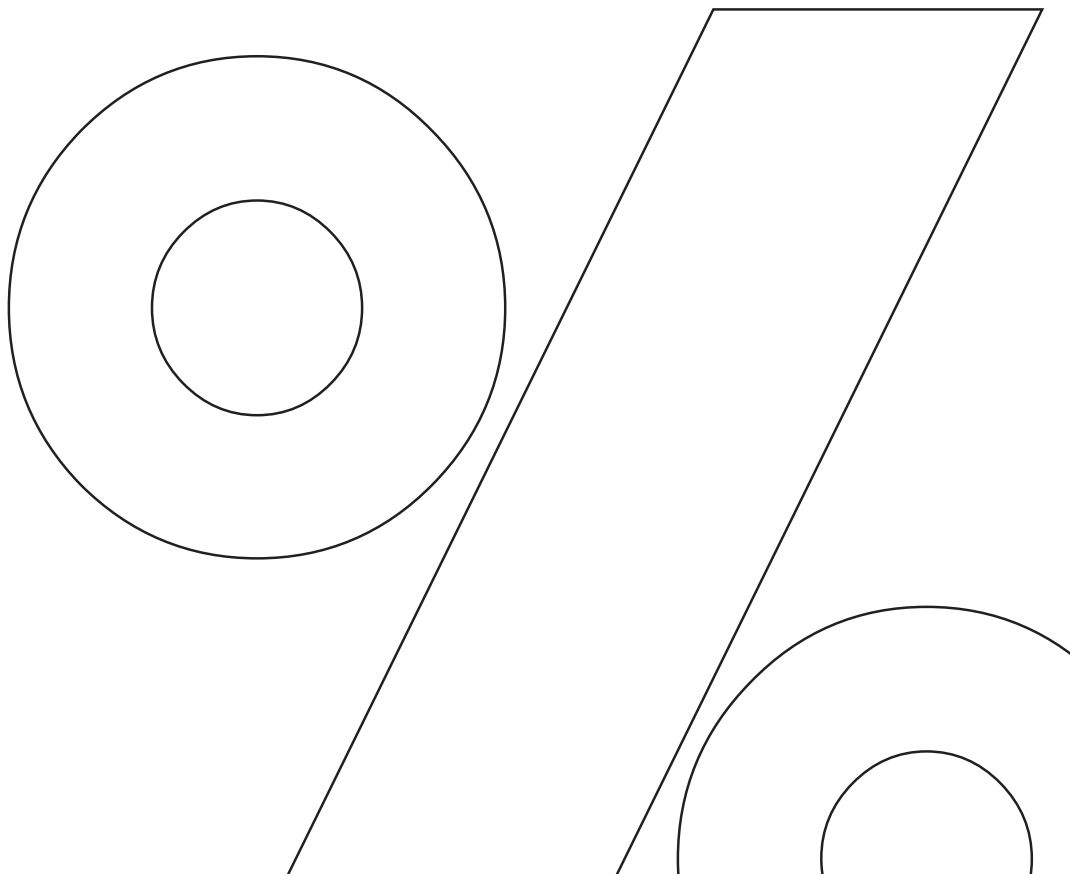
$$a_n = 10.000 \times 1,05^7$$

$$a_n = 10.000 \times 1,4071$$

$$a_n = 14.071$$

CAPÍTULO 5

REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO DE JUROS



REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO DE JUROS

Em Matemática Financeira, a expressão “*capitalização de juros*” encontra-se diretamente ligada aos sistemas ou métodos de cálculos, através dos quais os capitais são remunerados.

Existem basicamente dois regimes de capitalização de juros: o de juros compostos e o de juros simples.

Juros compostos são capitalizados período a período, de forma exponencial.

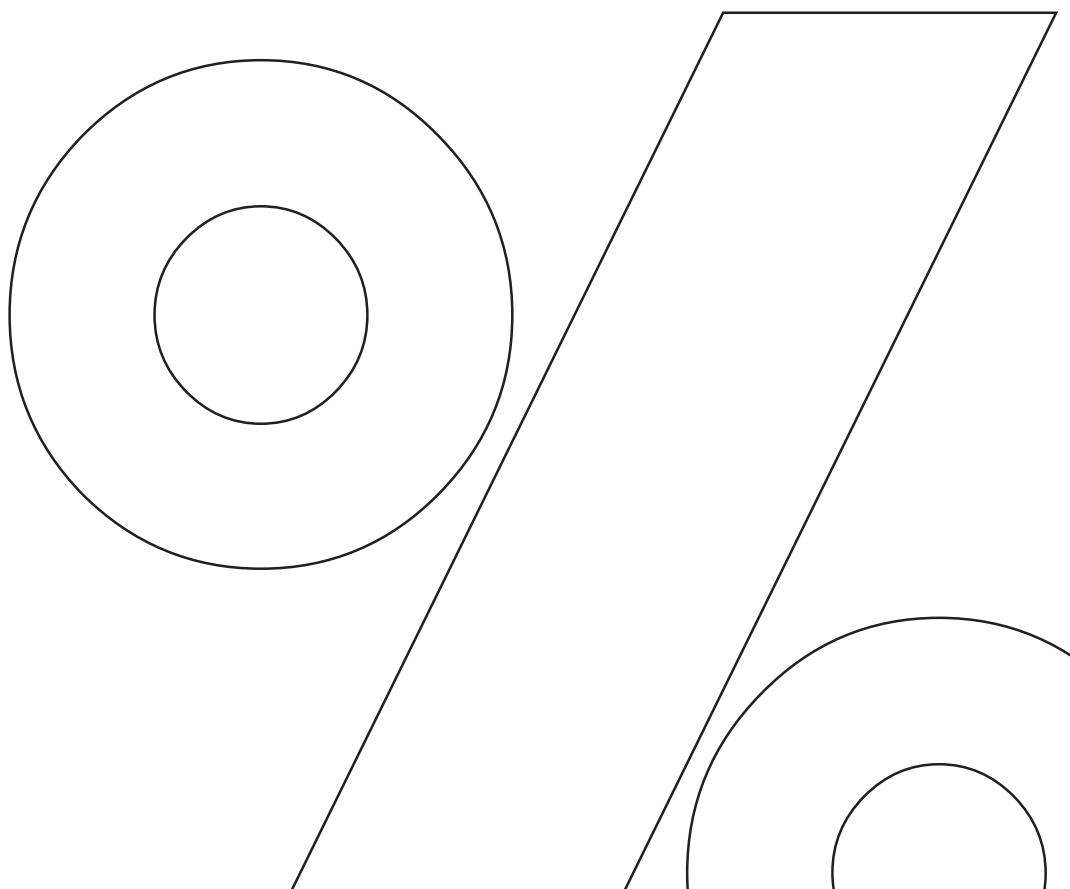
Juros simples são apropriados de forma linear.

Um empréstimo a juros simples implica em multiplicação da taxa de juros pelo número de períodos, em verdade, uma sequência de somas da taxa.

Em juros compostos há potenciação da taxa de juros pelo número de períodos, ou seja, uma sequência de multiplicações.

CAPÍTULO 6

REGIME DE CAPITALIZAÇÃO POR JUROS COMPOSTOS (CJC)



REGIME DE CAPITALIZAÇÃO POR JUROS COMPOSTOS (CJC)

Considere-se um valor a ser investido ou emprestado por um determinado período, a uma taxa pré-determinada de juros compostos, para ser resgatado ou pago em **uma só parcela, no último momento do prazo considerado.**

Aliás, esta é a ***premissa básica de qualquer investimento ou empréstimo: o quanto poderá ser resgatado ou deverá ser pago, ao final do período determinado, em razão da incidência de juros sobre o capital inicial.***

De acordo com a terminologia matemática e econômica, e, ainda, do Direito, juro composto é o mesmo que anatocismo, juro progressivo, capitalização de juro e/ou juro sobre juro.

O renomado matemático José Dutra Vieira Sobrinho conceitua juros compostos como sendo o processo de obtenção de juros (ou do montante) em que a taxa de juro definida para o período unitário incide sobre o capital inicial e, também, sobre os juros que vão se acumulando periodicamente. (VIEIRA SOBRINHO, 1981)

O também acreditado Alexandre Assaf Neto esclarece que o regime de capitalização composta incorpora, ao capital, não somente os juros referentes a cada período, mas também os juros sobre os juros acumulados até o momento anterior. (ASSAF NETO, 1986)

A expressão do cálculo dos juros compostos em cada período é:

$$JC_{\text{do período atual}} = PV_{\text{do período anterior}} \times i\%$$

A Capitalização por Juros Compostos (CJC) consiste no método em que os juros calculados, a cada período, são incorporados ao capital do período anterior, formando um novo capital, valor futuro, montante ou saldo devedor final ($FV_{JC1} = PV_0 + JC_1$), e assim por diante.

Este montante ou valor futuro, por sua vez, será base para o cálculo dos juros (JC_2) do período seguinte, formando assim um novo montante ou valor futuro ($FV_2 = PV_1 + JC_2$), e assim por diante.

Assim, um capital inicial, valor presente ou saldo devedor inicial (PV) é remunerado a juro composto (JC), ou regime de capitalização composta, se, no fim de cada período (geralmente, mensal), previamente estipulado, o juro produzido ($i\%$) é agregado ao capital e passa a render novo juro, de forma sucessiva, até o prazo (n).

Este sistema incorpora ao capital não somente os juros referentes a cada período, mas também os juros sobre juros acumulados até o momento anterior.

Conforme o tempo vai passando, o valor vai crescendo em uma **expressão na ordem exponencial**.

Em assim sendo, o regime de Capitalização por Juros Compostos (CJC) se baseia nos conceitos fundamentais das **progressões geométricas (PG)**, no qual os juros incidem sempre sobre o saldo devedor do **período anterior**, ou seja, no início do novo e atual período correspondente (e não unicamente sobre o capital inicial).

Em cada período, a partir do instante zero, a taxa de juros $i\%$ é **MULTIPLICADA** pelo capital do período imediatamente anterior (um inteiro = 1), resultando no “fator de capitalização ou de multiplicação”: $1 + i\%$, que corresponde à incorporação dos juros ao capital de cada período, e assim sucessivamente, até o prazo preestabelecido.

Se a um determinado valor “1” deve ser aplicada taxa de juros de 5% ao período, durante 7 períodos, a partir do instante zero, a série exponencial é assim definida:

$$1 \times (1+5\%) \times (1+5\%) \times (1+5\%) \times (1+5\%) \times (1+5\%) \times (1+5\%) \times (1+5\%)$$

$$1,05^7 = 1,05 \times 1,05 \times 1,05 \times 1,05 \times 1,05 \times 1,05 \times 1,05$$

$$1,05^7 = 1,4071$$

Cabe observar que, apesar de serem 7 períodos de capitalização de juros, a PG tem 8 termos, uma vez que o primeiro é “1”.

Se o primeiro termo da PG, o valor financiado PV for R\$ 10.000,00; $i\% = 5\%$; $n = 7$, o oitavo e último termo, valor acumulado (FV), pelo regime de Capitalização por Juros Compostos (CJC) é assim apurado:

<i>Capitalização por Juros Compostos (CJC) ou sistema exponencial</i>									
MOMENTO	PV = Valor Presente	PERÍODO DE INCI-DÊNCIA	% TAXA DE JUROS A APLICAR	VALOR DO JURO MENSAL	% SOBRE SALDO ANTE-RIOR	% SOBRE PV em 0	TAXA DE CRESCI-MENTO DOS JUROS	TERMO	FV = Valor Futuro
0								1	10.000,00
1	10.000,00	1	5,00%	500,00	5,00%	5,00%		2	10.500,00
2	10.500,00	2	5,00%	525,00	5,00%	5,25%	5,00%	3	11.025,00
3	11.025,00	3	5,00%	551,25	5,00%	5,51%	5,00%	4	11.576,25
4	11.576,25	4	5,00%	578,81	5,00%	5,79%	5,00%	5	12.155,06
5	12.155,06	5	5,00%	607,75	5,00%	6,08%	5,00%	6	12.762,82
6	12.762,82	6	5,00%	638,14	5,00%	6,38%	5,00%	7	13.400,96
7	13.400,96	7	5,00%	670,05	5,00%	6,70%	5,00%	8	14.071,00

*Importante observar que, tendo em vista a **base de cálculo ser variável**, ou seja, o saldo devedor de cada período anterior, sobre esta verba a taxa de juros de 5% se mantém constante. Em relação ao capital inicial, a taxa de 5% se mantém a mesma somente no primeiro período, aumentando exponencialmente nos períodos seguintes, com incrementos também à taxa de 5%.*

Ou seja, o valor dos juros é R\$ 500,00 somente no momento 1; de R\$ 525,00, no momento 2; de R\$ 551,25 no momento 3; e, assim por diante, até R\$ 670,05 no momento 7.

A sistemática descrita expressa a razão da PG, que é um número constante, não nulo, que aumenta ou diminui o próximo termo da PG, e corresponde à *multiplicação* do capital do período imediatamente anterior (1 inteiro) pela taxa de juros, fator de multiplicação, constituindo-se em sucessão de números tais que, cada um, a partir do segundo é igual ao precedente multiplicado por um número relativo constante.

Em Matemática, a sucessão de multiplicações se configura na operação denominada **exponenciação (ou potenciação)**.

Na capitalização composta, ao capital do período imediatamente anterior (um inteiro = 1) é multiplicado o juro do período, acarretando montante (PG crescente) que servirá de base de cálculo para o juro do período seguinte, e assim por diante.

A fórmula geral de apuração de qualquer um dos termos da PG é:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_n \rightarrow n\text{-ésimo termo}$$

$$a_1 \rightarrow \text{primeiro termo}$$

$$q \rightarrow \text{razão } (1 + i\%) \text{ (fator de capitalização)}$$

$$n \rightarrow \text{quantidade de termos}$$

Em uma PG de 8 termos (7 períodos), cujo primeiro termo (instante zero) é 10.000 e a taxa de juros é 5%, a razão é 1,05 (fator de multiplicação ou de capitalização).

$$A_8 = 10.000 \times [1,05^{(8-1)}] = 10.000 \times [1,05^7] = 10.000 \times 1,4071$$

$$A_8 = 14.071$$

No exemplo ora em análise, qual seria o montante obtido ao final de 7 períodos (8 termos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), se aplicados R\$ 10.000,00 a uma taxa de juros de 5% ao período, no regime de capitalização composta?

Os oito termos da PG (matemática) equivalem a sete períodos do fluxo de caixa (matemática financeira).

$$a_n \rightarrow \text{FV (montante)}$$

$$a_1 \rightarrow \text{PV (capital inicial)}$$

$$q \rightarrow 1 + i\% \text{ (valor dos juros em cada período) (fator de capitalização)}$$

$$n \rightarrow \text{prazo}$$

Substituindo na PG:

$$\text{FV} \rightarrow a_n$$

$$\text{PV} \rightarrow a_1$$

$$1 + i\% \rightarrow q$$

$$\text{FV} = 10.000,00 \times (1 + 5\%)^7$$

$$\text{FV} = 10.000,00 \times 1,4071$$

$$\text{FV} = 14.071,00$$

Conclui-se que o regime de Capitalização por Juros Compostos (CJC) (juros sobre juros) se coaduna perfeitamente no conceito e nos postulados da progressão geométrica (P.G.) com crescimento exponencial.

Assim compreendido o conceito e a sistemática, para encontrar o montante ou valor futuro (FV), pelo regime de Capitalização por Juros Compostos (CJC), foi sintetizada a seguinte fórmula básica:

$$FV_{JC} = PV \cdot (1 + i\%)^n$$

em que: FV_{JC} = valor futuro a juros compostos, PV = valor presente, $i\%$ = taxa de juros, e n = períodos.

O caminho inverso

A partir do valor futuro $VF_{JC} = 14.071,00$, considerada a taxa de juros $i\% = 5\%$ e o número de períodos $n = 7$, é possível obter o valor presente.

$$PV = \frac{FV_{JC}}{(1 + i\%)^n}$$

$$PV = \frac{14.071,00}{1,4071}$$

$$PV = 10.000,00$$

É possível demonstrar a decomposição dos juros compostos, mediante detalhamento didático e autoexplicativo.

Momento 0:

$$J = P \cdot i\% \cdot n$$

$$J_0: 10.000,00 \times 0 \times 5\% = 0,00$$

$$FV_0 = PV + J_0$$

$$10.000,00 (PV) + 0,00 (J_0) = 10.000,00$$

Momento 1:

$$J_1: 10.000,00 \times 1 \times 5\% = 500,00$$

$$FV_1: 10.000,00 (PV) + 500,00 (J_1) = 10.500,00$$

Momento 2:

$$J_2: (10.000,00 + 500,00) \times 1 \times 5\%$$

$$J_2: 500,00 (J_2) + 25,00 (J \text{ do } J_1) = 525,00$$

$$FV_2 = FV_1 + J_2 = 10.000,00 (PV) + 500,00 (J_1) + 500,00 (J_2) + 25,00 (J \text{ de } J_1)$$

$$FV_2 = 11.025,00$$

Momento 3:

$$J_3: (10.000,00 + 500,00 + 500,00 + 25,00) \times 1 \times 5\%$$

$$J_3: 500,00 (J_3) + 25,00 (J \text{ do } J_2) + 25,00 (J \text{ do } J_1) + 1,25 (J \text{ do } J \text{ do } J_1) = 551,25$$

$$FV_3 = FV_2 + J_3 = 10.000,00 (PV) + 500,00 (J_1) + 500,00 (J_2) + 25,00 (J \text{ de } J_1) + 500,00 (J_3) + 25,00 (J \text{ do } J_2) + 25,00 (J \text{ do } J_1) + 1,25 (J \text{ do } J \text{ do } J_1)$$

$$FV_3 = 11.576,25$$

Momento 4:

$$J_4: (10.000,00 + 500,00 + 500,00 + 25,00 + 500,00 + 25,00 + 25,00 + 1,25) \times 1 \times 5\%$$

$$J_4: 500,00 + 25,00 + 25,00 + 1,25 + 25,00 + 1,25 + 1,25 + 0,0625 = 578,81$$

$$FV_4 = FV_3 + J_4 = 10.000,00 + 500,00 + 500,00 + 25,00 + 500,00 + 25,00 + 25,00 + 1,25$$

$$FV_4 = 12.155,06$$

Da mesma forma, obtém-se:

Momento 5:

$$FV_5 = 12.762,82$$

Momento 6:

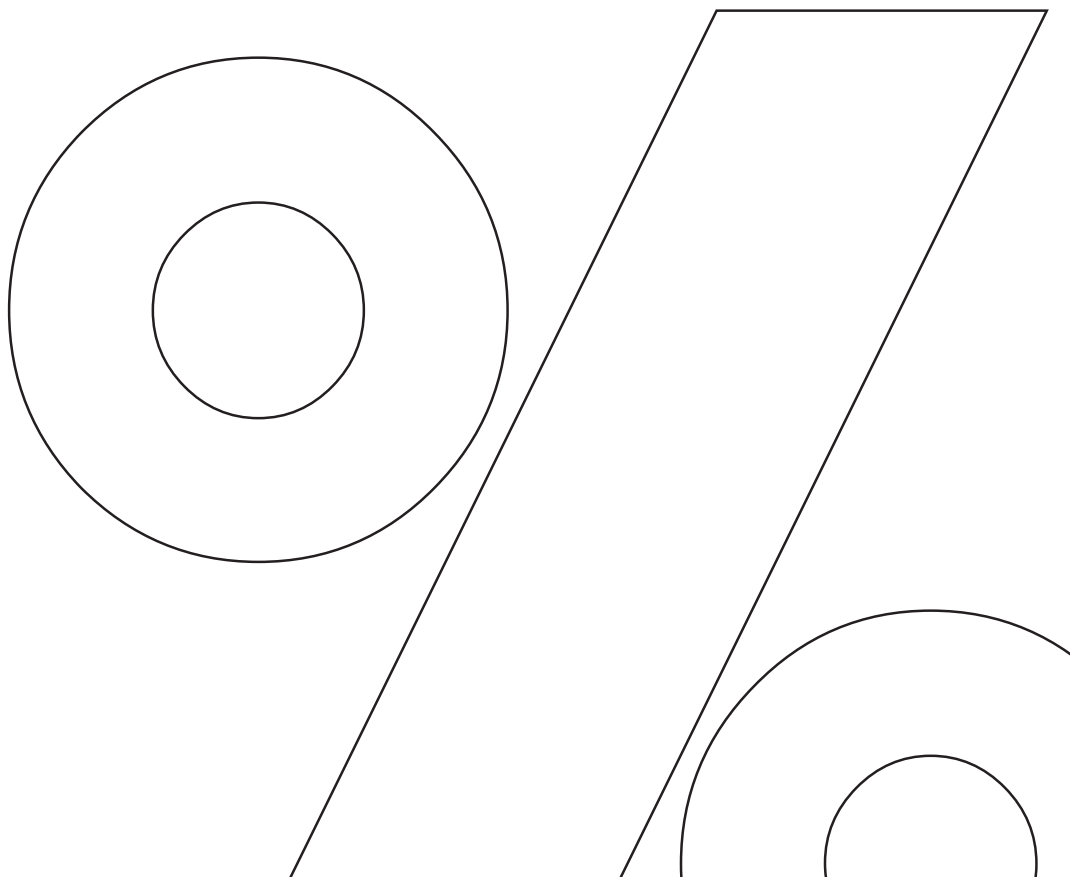
$$FV_6 = 13.400,96$$

Momento 7:

$$FV_7 = 14.071,00$$

CAPÍTULO 7

REGIME DE CAPITALIZAÇÃO POR JUROS SIMPLES (CJS)



REGIME DE CAPITALIZAÇÃO POR JUROS SIMPLES (CJS)

Considere-se um valor a ser investido ou emprestado por um determinado período, a uma taxa pré-determinada de juros simples, para ser resgatado ou pago em uma só parcela, no último momento do prazo considerado.

Por exemplo:

Capital inicial: R\$ 10.000,00;

Taxa de juros por período: 5%;

Número de períodos: 7.

Juros simples (JS) são a remuneração proporcional ao capital (PV) emprestado ou investido, com base em uma taxa ($i\%$) e um prazo preestabelecido (n), que produzem um valor futuro (FV), composto de capital inicial mais juros acumulados dentro do prazo.

A expressão do cálculo dos juros simples em cada período é:

$$JS_{\text{do período atual}} = PV \cdot i\%$$

A Capitalização por Juros Simples (CJS) consiste no método em que os juros são calculados sempre sobre o mesmo capital inicial (aplicação, empréstimo ou financiamento), com base nos postulados da progressão aritmética (P.A.), cujo crescimento é linear, mediante ADIÇÃO da taxa de juros: sucessão de números em que, cada um, a partir do segundo, é igual à soma do precedente com um número constante, não nulo, denominado “razão”.

Não são computados juros sobre o saldo de juros acumulados.

Conforme o tempo vai passando, o valor vai crescendo em uma **expressão na ordem linear**.

Em assim sendo, o regime de Capitalização por Juros Simples (CJS) se baseia nos conceitos fundamentais das **progressões aritméticas (PA)**.

Neste regime, a taxa de juros $i\%$ incide sempre sobre o capital inicial, no início do período correspondente.

Em cada período, a partir do instante zero, a taxa de juros $i\%$ é **somada** ao capital do período imediatamente anterior (um inteiro = 1), e assim sucessivamente, até o prazo preestabelecido.

Se a um determinado valor “1” deve ser aplicada taxa de juros de 5% ao período, durante 7 períodos, a partir do instante zero, a série linear é assim definida:

$1 + 5\% + 5\% + 5\% + 5\% + 5\% + 5\% + 5\%$
 $1 + (5\% \times 7)$
 $1 + (0,05 \times 7) = 1,35$

Cabe observar que, apesar de serem 7 períodos de capitalização de juros, a PA tem 8 termos, uma vez que o primeiro é “1”.

Se o primeiro termo da PA, o valor financiado PV for R\$ 10.000,00; $i\% = 5\%$; $n = 7$, o oitavo e último termo, valor acumulado (FV), pelo regime de Capitalização por Juros Simples (CJS) é assim apurado:

<i>Regime de Capitalização Simples (CJS) ou sistema linear</i>									
MOMENTO	PV = Valor Presente	PERÍODO DE INCI-DÊNCIA	% TAXA DE JUROS A APLICAR	VALOR DO JURO MENSAL	% SOBRE SALDO ANTE-RIOR	% SOBRE PV em 0	TAXA DE CRESCI-MENTO DOS JUROS	TERMO	FV = Valor Futuro
0								1	10.000,00
1	10.000,00	1	5,00%	500,00	5,00%	5,00%		2	10.500,00
2	10.500,00	2	5,00%	500,00	4,76%	5,00%	0,00%	3	11.000,00
3	11.000,00	3	5,00%	500,00	4,55%	5,00%	0,00%	4	11.500,00
4	11.500,00	4	5,00%	500,00	4,35%	5,00%	0,00%	5	12.000,00
5	12.000,00	5	5,00%	500,00	4,17%	5,00%	0,00%	6	12.500,00
6	12.500,00	6	5,00%	500,00	4,00%	5,00%	0,00%	7	13.000,00
7	13.000,00	7	5,00%	500,00	3,85%	5,00%	0,00%	8	13.500,00

Importante observar que, tendo em vista a base de cálculo ser fixa, ou seja, sempre o capital inicial, sobre esta verba a taxa de juros de 5% se mantém constante. Em relação ao saldo devedor de cada período anterior, a taxa de 5% se mantém a mesma somente no primeiro período, diminuindo gradativamente nos períodos seguintes.

Ou seja, o valor dos juros é sempre o mesmo, neste caso, R\$ 500,00, gradativa e proporcionalmente menor à soma do capital inicial e dos juros acumulados a cada período.

A sistemática descrita corresponde à razão da PA, que é um número constante, não nulo, que aumenta ou diminui o próximo termo da PA, e corresponde à **adição** do capital do período imediatamente anterior (1 inteiro) com a taxa de juros, constituindo-se em sucessão de números tais que, cada um, a partir do segundo é igual ao precedente adicionado por um número relativo constante maior que 1.

Em Matemática, a sucessão de adições se configura na operação denominada **multiplicação**.

Razão menor que zero resulta em PA decrescente. Razão maior que zero, PA crescente.

Na capitalização simples, ao capital do período imediatamente anterior (um inteiro = 1) é adicionado o juro do período, acarretando montante maior (PA crescente).

Repetindo: razão (r) é um número constante, não nulo, que aumenta ou diminui o próximo termo. Isto é exatamente igual ao juro de um período.

A fórmula geral de apuração de qualquer um dos termos da PA é:

$$a_n = a_1 + r \cdot (n - 1)$$

$$a_n \rightarrow \text{n-ésimo termo}$$

$$a_1 \rightarrow \text{primeiro termo}$$

$$r \rightarrow \text{razão}$$

$$n \rightarrow \text{quantidade de termos}$$

Isto se constitui em uma função de primeiro grau, cuja taxa de crescimento, a cada período, é obtida pela multiplicação da taxa de juros pelo capital.

$$\text{PV} \cdot i\%$$

Em uma P.A. de 8 termos (7 períodos), cujo primeiro termo (instante zero) é 10.000 e a taxa de juros é 5%, o oitavo termo é.

$$a_n = a_1 + r \cdot (n - 1)$$

$$a_n = a_1 \cdot \{1 + [r \cdot (n - 1)]\}$$

$$A_8 = 10.000 \times \{1 + [5\% \times (8 - 1)]\} = 10.000 \times \{1 + [5\% \times (7)]\}$$

$$A_8 = 10.000 \times \{1 + [35\%]\} = 10.000 \times 1,35$$

$$A_8 = 13.500$$

No exemplo ora em análise, qual seria o montante obtido ao final de 7 períodos (8 termos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), se aplicados R\$ 10.000,00 a uma taxa de juros de 5% ao período, no regime de capitalização simples?

Os oito termos da PA (Matemática) equivalem a sete períodos do fluxo de caixa (Matemática Financeira).

$$a_n \rightarrow \text{FV (montante)}$$

$$a_1 \rightarrow \text{PV (capital inicial)}$$

$$r \rightarrow i\% \text{ (valor dos juros em cada período)}$$

$$n \rightarrow \text{prazo}$$

Substituindo na PA:

$$\text{FV} \rightarrow a_n$$

$$\text{PV} \rightarrow a_1$$

$$\text{PV} \cdot i\% \rightarrow r$$

$$\text{FV} = 10.000 \times [1 + (5\% \times 7)]$$

$$\text{FV} = 10.000 \times 1,35$$

$$\text{FV} = 13.500,00$$

ou

$$\text{FV} = 10.000,00 + 10.000,00 \times 5\% \times 7$$

$$\text{FV} = 10.000,00 + 3.500,00$$

$$\text{FV} = 13.500,00$$

Conclui-se que o regime de Capitalização por Juros Simples (CJS) (juros simples somente sobre o capital inicial) se coaduna perfeitamente no conceito e nos postulados da progressão aritmética (PA), com crescimento linear ao longo do tempo.

De acordo com a demonstração a seguir, é possível entender melhor estes conceitos.

FV_{js} = montante ou valor futuro

PV = capital inicial ou valor presente

J = valor dos juros em cada período

$i\%$ = taxa de juros

n = períodos.

$$J = PV \cdot i\% \cdot n$$

$$FV_{js} = PV + J$$

$$FV_{js} = PV + (PV \cdot i\% \cdot n)$$

Compreendidos os conceitos e sistemáticas para encontrar o montante (FV_{js}) pelo regime de Capitalização por Juros Simples (CJS), foi sintetizada a seguinte fórmula básica:

$$FV_{js} = PV \cdot [1 + (i\% \cdot n)]$$

O caminho inverso

A partir do valor futuro $VF = 13.500,00$, considerada a taxa de juros $i\% = 5\%$ e o número de períodos $n = 7$, é possível obter o valor presente.

$$PV = \frac{FV_{js}}{[1 + (i\% \cdot n)]}$$

$$PV = \frac{13.500,00}{[1 + (5\% \times 7)]}$$

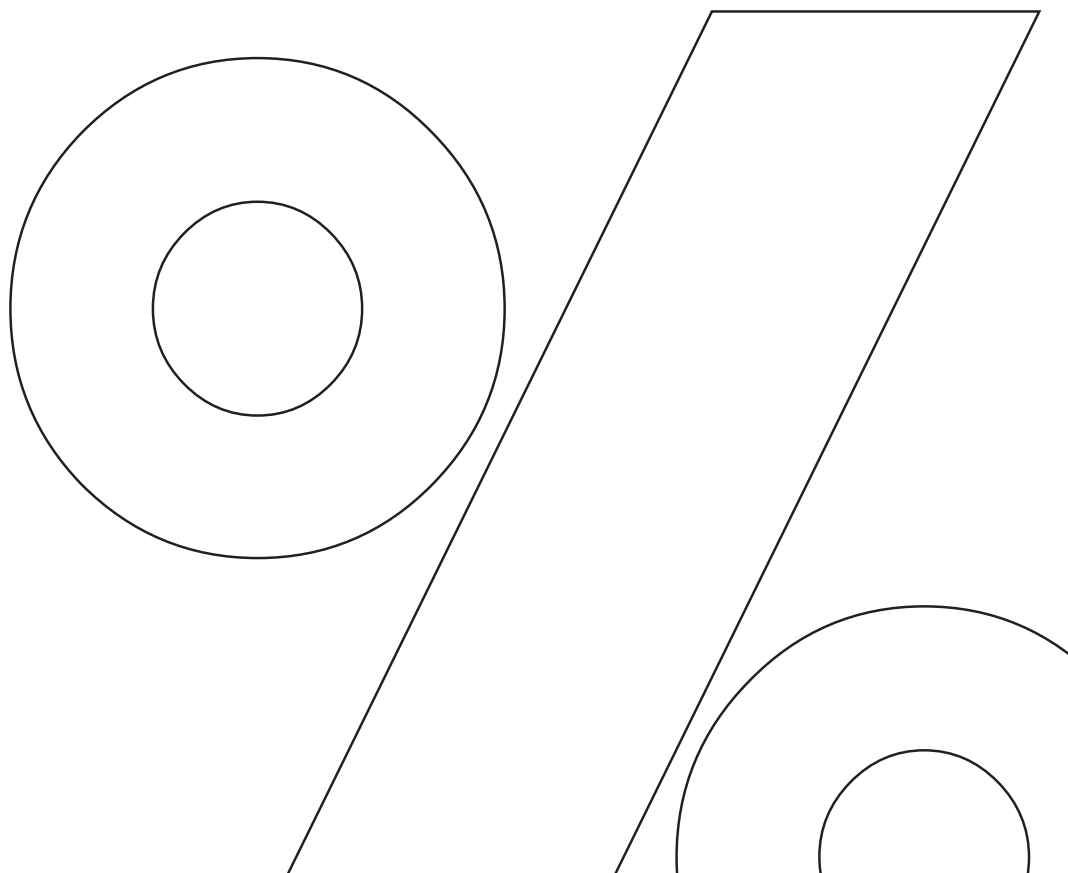
$$PV = \frac{13.500,00}{1 + 35\%}$$

$$PV = \frac{13.500,00}{1,35}$$

$$PV = 10.000,00$$

CAPÍTULO 8

COMPARAÇÃO ENTRE JUROS SIMPLES E JUROS COMPOSTOS



COMPARAÇÃO ENTRE JUROS SIMPLES E JUROS COMPOSTOS

Cabe lembrar.

Juros simples utilizam operações de divisão e multiplicação, e são aplicados mediante o conceito de “progressão aritmética”.

Juros compostos utilizam operações de radiciação e potenciação, e são aplicados mediante o conceito de “progressão geométrica”.

Por óbvio, os fatores que também potencializam o resultado, expresso pelo montante ou valor futuro, são a taxa de juros assim como o prazo do contrato. Quanto maior a taxa e/ou o prazo, maior o valor futuro.

As diferenças entre os regimes de capitalização de juros têm característica exponencial, pois confrontam função exponencial dos juros compostos com função linear dos juros simples.

$$\text{razão} \frac{JC}{JS} = \frac{(1 + i\%)^n}{1 + i\% \cdot n}$$

Para caracterizar e diferenciar os regimes de capitalização dos juros são necessários, no mínimo, dois períodos, pois, no primeiro período, não há diferença entre juros compostos e juros simples, pois se equivalem.

Em 7 períodos, parece ser muito pequena a diferença entre os regimes de capitalização.

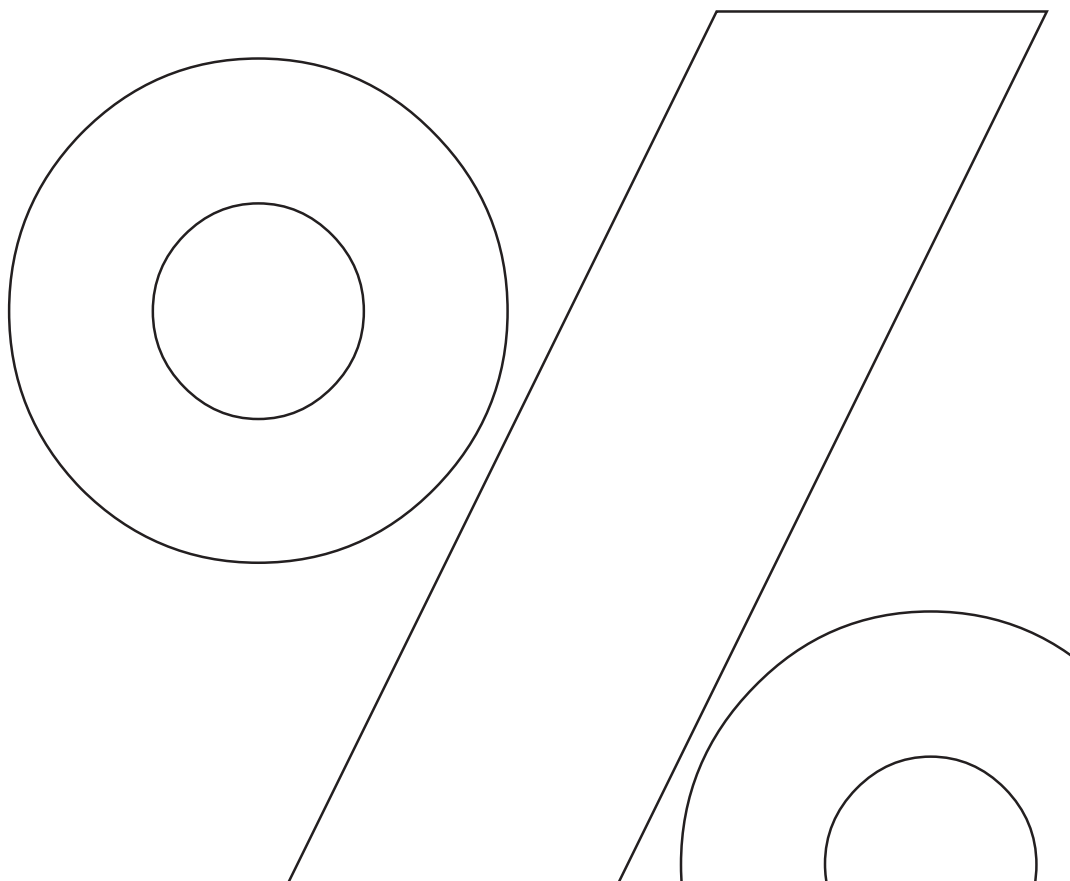
NUM PARC	JUROS COMPOSTOS	JUROS SIMPLES	DIFERENÇA	VARIAÇÃO PERCENTUAL
1	10.500,00	10.500,00	-	0,00%
2	11.025,00	11.000,00	25,00	0,23%
3	11.576,25	11.500,00	76,25	0,66%
4	12.155,06	12.000,00	155,06	1,29%
5	12.762,82	12.500,00	262,82	2,10%
6	13.400,96	13.000,00	400,96	3,08%
7	14.071,00	13.500,00	571,00	4,23%

De 1 até 360 períodos, a diferença se acentua gradativamente, sobremaneira, de forma exponencial.

NUM PARC	JUROS COMPOSTOS	JUROS SIMPLES	DIFERENÇA	VARIAÇÃO PERCENTUAL
12	17.958,56	16.000,00	1.958,56	12,24%
24	32.251,00	22.000,00	10.251,00	46,60%
36	57.918,16	28.000,00	29.918,16	106,85%
48	104.012,70	34.000,00	70.012,70	205,92%
60	186.791,86	40.000,00	146.791,86	366,98%
72	335.451,34	46.000,00	289.451,34	629,24%
84	602.422,41	52.000,00	550.422,41	1058,50%
96	1.081.864,10	58.000,00	1.023.864,10	1765,28%
108	1.942.872,49	64.000,00	1.878.872,49	2935,74%
120	3.489.119,86	70.000,00	3.419.119,86	4884,46%
132	6.265.957,97	76.000,00	6.189.957,97	8144,68%
144	11.252.760,25	82.000,00	11.170.760,25	13622,88%
156	20.208.340,69	88.000,00	20.120.340,69	22864,02%
168	36.291.276,46	94.000,00	36.197.276,46	38507,74%
180	65.173.918,41	100.000,00	65.073.918,41	65073,92%
192	117.042.993,67	106.000,00	116.936.993,67	110317,92%
204	210.192.400,59	112.000,00	210.080.400,59	187571,79%
216	377.475.352,29	118.000,00	377.357.352,29	319794,37%
228	677.891.499,33	124.000,00	677.767.499,33	546586,69%
240	1.217.395.737,42	130.000,00	1.217.265.737,42	936358,26%
252	2.186.267.836,32	136.000,00	2.186.131.836,32	1607449,88%
264	3.926.222.924,24	142.000,00	3.926.080.924,24	2764845,72%
276	7.050.932.275,87	148.000,00	7.050.784.275,87	4764043,43%
288	12.662.461.331,97	154.000,00	12.662.307.331,97	8222277,49%
300	22.739.961.286,02	160.000,00	22.739.801.286,02	14212375,80%
312	40.837.703.329,00	166.000,00	40.837.537.329,00	24600926,10%
324	73.338.647.863,61	172.000,00	73.338.475.863,61	42638648,76%
336	131.705.674.707,77	178.000,00	131.705.496.707,77	73991852,08%
348	236.524.469.096,96	184.000,00	236.524.285.096,96	128545807,12%
360	424.763.964.086,80	190.000,00	424.763.774.086,80	223559881,10%

CAPÍTULO 9

AMORTIZAÇÃO



AMORTIZAÇÃO

A amortização é a operação que consiste na extinção gradativa de uma dívida, por meio de pagamentos parcelados, ditos prestações, sendo mais comum o caso em que tais prestações são constantes, séries finitas, em períodos fixos, com pagamentos postecipados (ao final de cada período).

As prestações assim apuradas devem ser suficientes a reembolsar o capital cedido e seus respectivos juros.

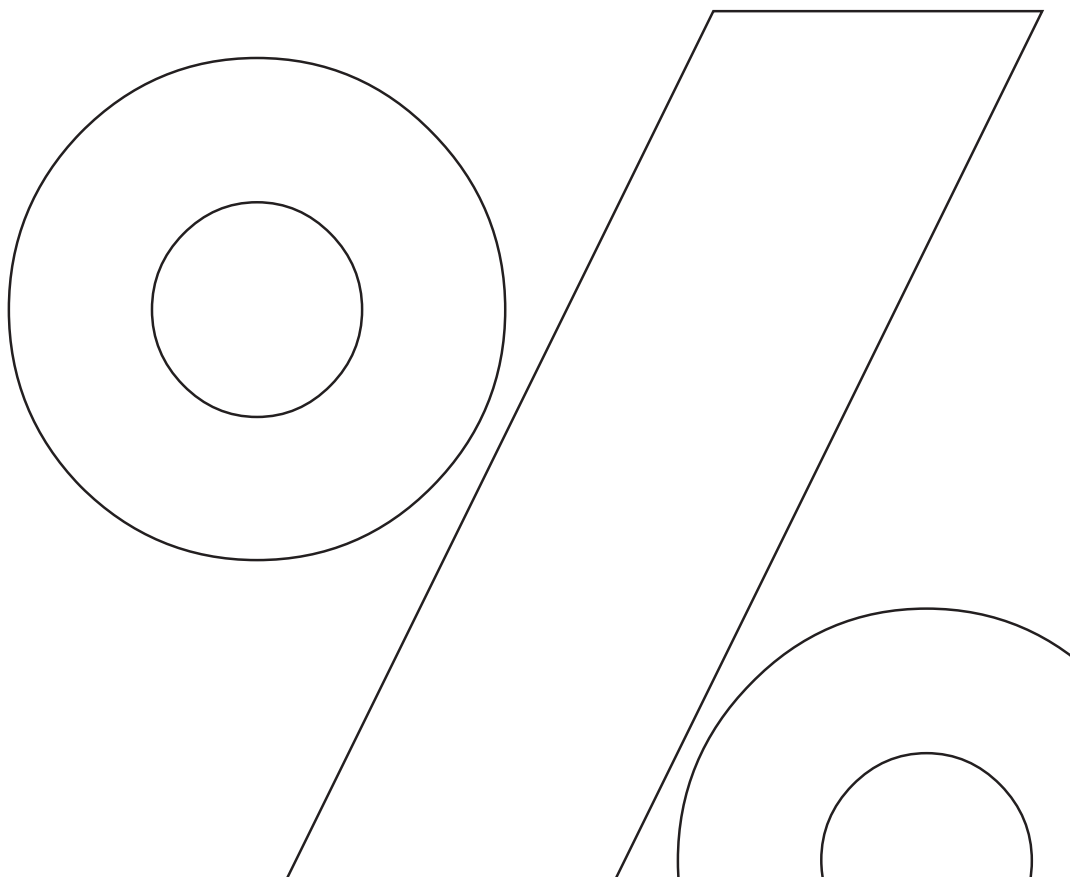
Ou seja, ao invés de um único pagamento, ao final do prazo predeterminado, o valor financiado deve ser resgatado em valores fixos periódicos, iguais entre si, de tal modo que a soma destas prestações atualizadas se equiparem ao valor futuro.

Por corolário lógico, se o valor futuro tiver sido obtido de forma composta, a prestação periódica também conterà juros compostos.

E, se o valor futuro tiver sido construído de forma linear, a prestação conterà juros simples.

CAPÍTULO 10

PRESTAÇÃO PERIÓDICA POR JUROS COMPOSTOS



PRESTAÇÃO PERIÓDICA POR JUROS COMPOSTOS

A Matemática Financeira considera o valor do empréstimo e o das prestações suficientes para liquidá-lo por completo, unicamente sob o prisma do fluxo de caixa (entradas e saídas).

O valor financiado de R\$ 10.000,00, em 7 períodos, à taxa de 5% capitalizada a cada período, portanto de forma exponencial, implica em que, ao final do prazo, deva ser pago o valor único de R\$ 14.071,00.

$$FV_{JC} = PV \cdot (1 + i\%)^n$$

$$FV_{JC} = 10.000,00 \times (1 + 5\%)^7 = 10.000,00 \times (1,05)^7 = 10.000,00 \times 1,4071$$

$$FV_{JC} = 14.071,00$$

Se o valor financiado tiver que ser resgatado gradativamente, mediante 7 parcelas de valor fixo, iguais entre si, uma a cada período, qual o valor unitário das prestações postecipadas, em períodos de mesma duração, sucessivas e iguais, que, ao final do prazo “n”, remuneram um empréstimo de capital mais juros, no regime de juros compostos?

Importante frisar que a prestação (PMT) deve atender a dois pressupostos (prova real): (1) que, aplicada a taxa de juros, pela forma composta, na data focal “n”, a soma das parcelas atualizadas seja igual ao valor futuro; E (2) que, à taxa de juros, na data focal “0”, a soma das parcelas descapitalizadas a juros compostos seja igual ao valor presente.

No instante focal “n” (7), a primeira prestação PMT_1 será capitalizada “n-1” vezes (6). A segunda, PMT_2 , “n-2” (5). E assim por diante, até a sexta, PMT_6 , “n - (n-1)” vezes (1 vez) e a sétima, PMT_7 , (n-n) vez (0).

$$FV = PMT \cdot (1 + i\%)^n$$

$$FV_1 = PMT_1 \times (1 + 5\%)^6 = PMT_1 \times 1,3401$$

$$FV_2 = PMT_2 \times (1 + 5\%)^5 = PMT_2 \times 1,2763$$

$$FV_3 = PMT_3 \times (1 + 5\%)^4 = PMT_3 \times 1,2155$$

$$FV_4 = PMT_4 \times (1 + 5\%)^3 = PMT_4 \times 1,1576$$

$$FV_5 = PMT_5 \times (1 + 5\%)^2 = PMT_5 \times 1,1025$$

$$FV_6 = PMT_6 \times (1 + 5\%)^1 = PMT_6 \times 1,0500$$

$$FV_7 = PMT_7 \times (1 + 5\%)^0 = PMT_7 \times 1,0000$$

O valor da prestação é igual para todos os períodos:

$$PMT = PMT_1 = PMT_2 = PMT_3 = PMT_4 = PMT_5 = PMT_6 = PMT_7$$

O valor futuro em relação ao capital inicial deve ser igual à soma dos valores futuros de cada prestação periódica:

$$FV = FV_1 + FV_2 + FV_3 + FV_4 + FV_5 + FV_6 + FV_7$$

$$FV = PMT \times 8,142 \quad (8,142=1,3401+1,2763+1,2155+1,1576+1,1025+1,05+1)$$

$$PMT = \frac{14.071,00}{8,142}$$

$$PMT = 1.728,20$$

Em processo inverso, se $n = 7$; $i\% = 5\%$ ao período; $PMT = 1.728,20$, o montante pode ser apurado:

$$\frac{(1 + 5\%)^7 - 1}{5\%} = \frac{1,05^7 - 1}{0,05} = \frac{1,4071 - 1}{0,05} = \frac{0,4071}{0,05} = 8,142$$

$$1.728,20 \times 8,142 = 14.071,00 = FV$$

MOMENTO	JURO DO PERÍODO	VALOR FUTURO "FV"	PRESTAÇÃO PERIÓDICA	COEFICIENTE	VALOR DA PRESTAÇÃO ATÉ O ÚLTIMO PERÍODO
Σ				8,1420	14.071,00
0		10.000,00			
1	500,00	10.500,00	1.728,20	1,3401	2.315,95
2	525,00	11.025,00	1.728,20	1,2763	2.205,67
3	551,25	11.576,25	1.728,20	1,2155	2.100,64
4	578,81	12.155,06	1.728,20	1,1576	2.000,61
5	607,75	12.762,82	1.728,20	1,1025	1.905,34
6	638,14	13.400,96	1.728,20	1,0500	1.814,61
7	670,05	14.071,00	1.728,20	1,0000	1.728,20

Mantidas as demais condições de taxa de juros, valor do empréstimo e prazo de pagamento da dívida, o valor futuro do empréstimo (a ser amortizado) é de R\$ 14.071,00, para pagamento único ao final do prazo (momento 7), idêntico ao valor da soma do valor atualizado das prestações, cada uma capitalizada de forma exponencial (geométrica) até o término do prazo, não sendo, de modo algum, a mera soma do valor nominal das parcelas, R\$ 12.097,40 (7 prestações em momentos diferentes).

É importante observar que a taxa de crescimento exponencial equivale ao fator de capitalização, que nada mais é do que a razão da progressão geométrica, ou seja, $1 + 5\%$ ou $1,05$.

Com base neste raciocínio, é possível sintetizar uma fórmula geral para cálculo da prestação a juros compostos.

O valor futuro (FV) equivale à soma dos termos do fluxo de caixa obtido com a construção algébrica retro.

$$FV = PMT \cdot (1+i\%)^{n-1} + PMT \cdot (1+i\%)^{n-2} + \dots + PMT \cdot (1+i\%)^1 + PMT \cdot (1+i\%)^0$$

$$FV = PMT \cdot [(1+i\%)^{n-1} + (1+i\%)^{n-2} + \dots + (1+i\%) + 1]$$

Aplicando-se a fórmula da soma das PGs, progressões geométricas:

$$S_{PG} = a_1 \cdot \frac{q^{n-1}}{q-1}$$

$$a_1 = (1 + i\%)^{n-1}$$

$$S_{PG} = \frac{[(1 + i\%)^n - 1]}{i\%}$$

$$FV_{JC} = \frac{PMT \cdot [(1 + i\%)^n - 1]}{i\%}$$

Cabe lembrar que:

$$FV_{JC} = PV \cdot (1 + i\%)^n$$

Então, é possível equiparar:

$$PV \times (1 + i\%)^n = \frac{PMT \cdot [(1 + i\%)^n - 1]}{i\%}$$

Em assim sendo, a fórmula geral da prestação periódica, para este método (pagamento de parcelas periódicas iguais e consecutivas, postecipadas, iguais entre si, de modo a resgatar capital e remunerar a juros compostos), é a seguinte:

$$PMT_{JC} = \frac{PV \cdot i\% \cdot (1 + i\%)^n}{(1 + i\%)^n - 1}$$

em que:

PMT_{JC} = valor da prestação (parcela),

PV = capital tomado emprestado,

$i\%$ = taxa de juros por unidade de tempo em formato % (taxa /100),

n = prazo de utilização em unidade de tempo.

Substituindo os valores, cada prestação será de R\$ 1.728,20, confirmando a perfeita identidade entre a sistemática de juros compostos e as progressões geométricas.

Um empréstimo de R\$ 10.000,00, à taxa de juros de 5% ao período, para ser pago em 7 parcelas iguais, ao final de cada período, para ser totalmente amortizado a juros compostos, deve ter como prestação:

$$PMT_{JC} = \frac{10.000,00 \times 5\% \times (1+5\%)^7}{(1+5\%)^7 - 1} = 1.728,20$$

O modelo é cientificamente comprovado, na medida em que o resultado do valor futuro (FV), pela fórmula $FV = PV \cdot [(1 + i\%)^n]$ seja exatamente igual às somas dos valores futuros (FV) de cada prestação (PMT_{JC}).

A prestação também pode ser calculada de outras maneiras, mediante uso dos conceitos da progressão geométrica, comprovando que, nesta sistemática, há incidência de juros compostos.

Uma das alternativas é multiplicar o capital adicionado do juro sobre juro pela constante do maior juro sobre saldo devedor, e dividir pelo valor do juro sobre juro.

$$\frac{14.071,00}{4.071,00} \times 500,00 = 1.728,20 = PMT$$

Outra é utilizar o coeficiente de juros compostos

$$(1 + 5\%)^7 = 1,4071$$

$$\frac{1,4071 - 1}{1,4071 \times 5\%} = 5,786367$$

ou

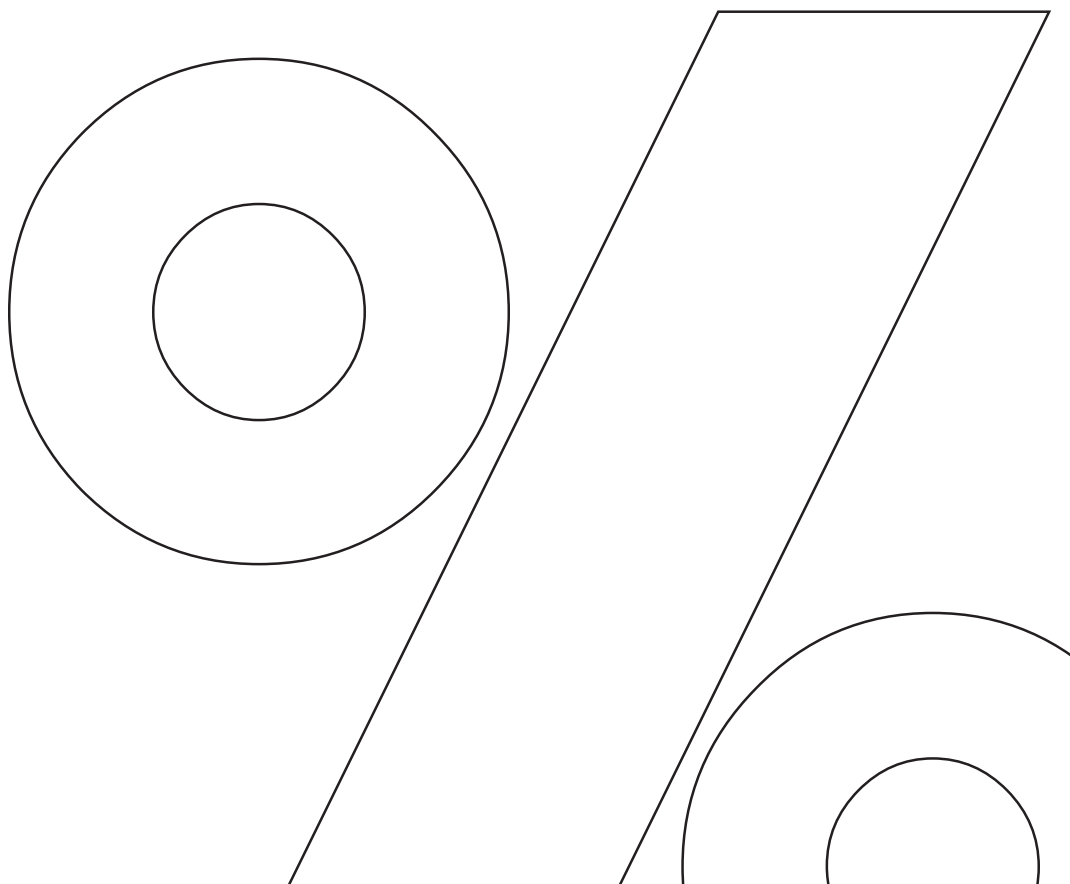
$$\frac{(1 + 5\%)^7 - 1}{(1 + 5\%)^7 \times 5\%} = \frac{0,4071}{0,70355} = 5,786367$$

A prestação resulta da divisão entre o capital emprestado e o fator de juros compostos.

$$\frac{10.000,00}{5,786367} = 1.728,20 = PMT$$

CAPÍTULO 11

VALOR PRESENTE POR JUROS COMPOSTOS, A PARTIR DA PRESTAÇÃO



VALOR PRESENTE POR JUROS COMPOSTOS, A PARTIR DA PRESTAÇÃO

Considere-se que, à taxa de juros de 5% ao período, capitalização composta, há 7 prestações consecutivas, postecipadas, cada uma de R\$ 1.728,20 a serem pagas.

Se, a partir da prestação periódica, em caminho inverso, for necessário apurar qual foi o valor financiado, equivalente ao valor presente, cada prestação deve ser descapitalizada pelo número de períodos que a equipare ao valor presente, no momento zero.

A primeira prestação tem juros capitalizados de 1 período; a segunda, de 2; e assim por diante, até a sétima, 7.

$$FV = PV \cdot (1 + i\%)^n$$

$$1.728,20 = PV \times (1 + 5\%)^1 \therefore 1.728,20 = PV \times 1,0500 \therefore PV_1 = 1.645,90$$

$$1.728,20 = PV \times (1 + 5\%)^2 \therefore 1.728,20 = PV \times 1,1025 \therefore PV_2 = 1.567,53$$

$$1.728,20 = PV \times (1 + 5\%)^3 \therefore 1.728,20 = PV \times 1,1576 \therefore PV_3 = 1.492,88$$

$$1.728,20 = PV \times (1 + 5\%)^4 \therefore 1.728,20 = PV \times 1,2155 \therefore PV_4 = 1.421,79$$

$$1.728,20 = PV \times (1 + 5\%)^5 \therefore 1.728,20 = PV \times 1,2763 \therefore PV_5 = 1.354,09$$

$$1.728,20 = PV \times (1 + 5\%)^6 \therefore 1.728,20 = PV \times 1,3401 \therefore PV_6 = 1.289,61$$

$$1.728,20 = PV \times (1 + 5\%)^7 \therefore 1.728,20 = PV \times 1,4071 \therefore PV_7 = 1.228,20$$

$$PV = PV_1 + PV_2 + PV_3 + PV_4 + PV_5 + PV_6 + PV_7$$

$$PV = 10.000,00$$

Esta é a prova real de que a prestação de valor R\$ 1.728,20 é a única que corresponde aos pressupostos da aplicação de juros compostos, tanto sob o prisma do valor futuro (FV) quanto do valor presente (PV), e que a sistemática é congruente com o conceito de progressões geométricas.

A partir da fórmula geral da prestação:

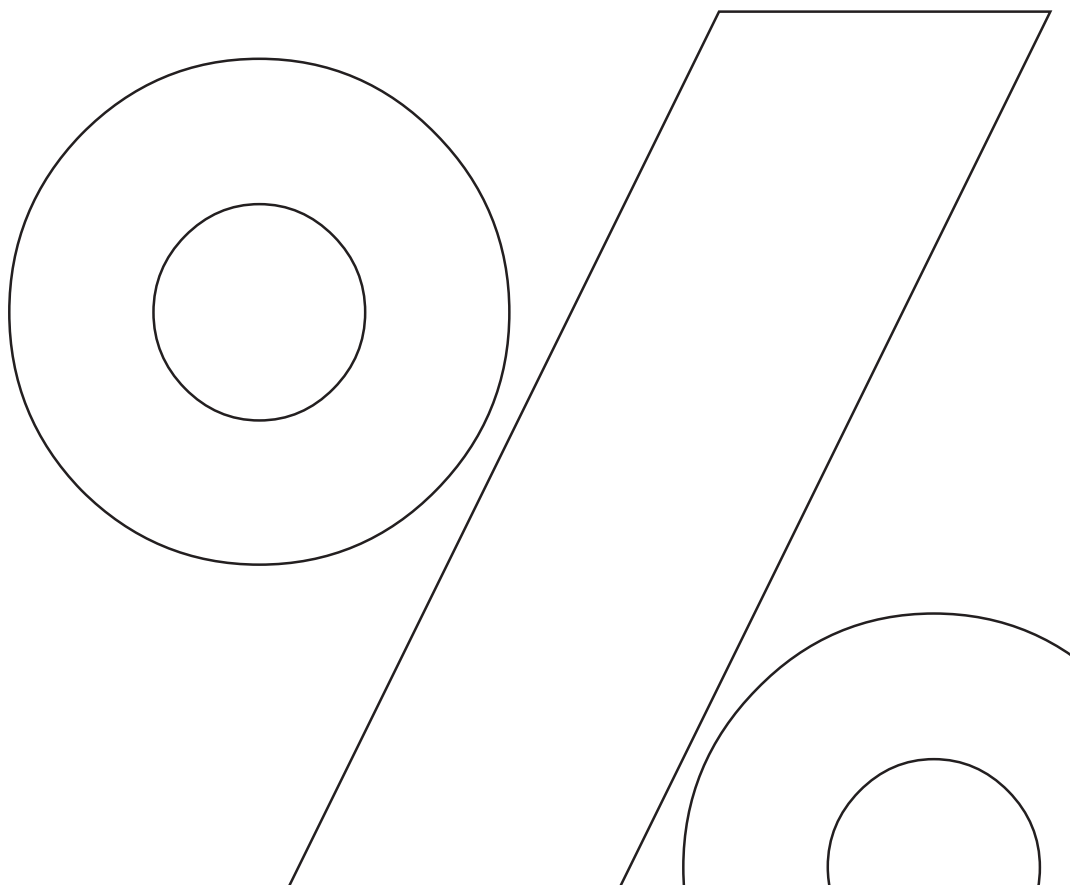
$$\mathbf{PMT_{JC} = PV \cdot i\% \cdot \frac{(1 + i\%)^n}{(1 + i\%)^n - 1}}$$

é possível apurar o valor presente:

$$\mathbf{PV = \frac{PMT_{JC} \cdot i\%}{1 - (1 + i\%)^{-n}}}$$

CAPÍTULO 12

PRESTAÇÃO PERIÓDICA POR JUROS SIMPLES



PRESTAÇÃO PERIÓDICA POR JUROS SIMPLES

Capitalização simples, por juros simples, é a operação em que a taxa de juros sempre incide sobre o capital inicial, não se registrando anatocismo, ou juros sobre o saldo dos juros acumulados.

O valor dos juros é constante, não há variação de uma unidade de tempo para outra.

Sua concepção matemática é uma equação de primeiro grau, cuja taxa de crescimento é obtida pela multiplicação da taxa de juros pelo capital inicial, equivalente ao conceito de progressão aritmética.

Conforme já visto, a Matemática Financeira considera o valor do empréstimo e o das prestações suficientes para liquidá-lo por completo, unicamente sob o prisma do fluxo de caixa (entradas e saídas).

O valor financiado de R\$ 10.000,00, em 7 períodos, à taxa de 5% a juros simples, portanto de forma linear, implica em que, ao final do prazo, deva ser pago o valor único de R\$ 13.500,00.

$$FV_{JS} = PV \cdot [1 + (i\% \cdot n)]$$

$$FV_{JS} = 10.000,00 \times [1 + (5\% \times 7)] = 10.000,00 \times 1,35 = 13.500,00$$

Se o valor financiado tiver que ser resgatado gradativamente, mediante 7 parcelas de valor fixo, iguais entre si, uma a cada período, qual o valor unitário das prestações postecipadas (PMT), em períodos de mesma duração, sucessivas e iguais, que, ao final do prazo “n”, remuneram um empréstimo de capital mais juros, no regime de juros simples?

Importante frisar que a prestação (PMT) deve atender a dois pressupostos: (1) que, aplicada a taxa de juros, pela forma simples, na data focal “n”, a soma das parcelas seja igual ao valor futuro; E (2) que, à taxa de juros, na data focal “0”, a soma das parcelas descapitalizadas a juros simples seja igual ao valor presente.

Na data focal “n”, ou seja, no último prazo, a primeira prestação (PMT₁) é remunerada a juros simples durante (n – 1) períodos, e seus valores são:

$$\mathbf{PMT_1: FV_1 = PMT \cdot [1 + i\% \cdot (n-1)]}$$

O valor futuro da segunda prestação,

$$\mathbf{PMT_2: FV_2 = PMT \cdot [1 + i\% \cdot (n-2)]}$$

O valor futuro da terceira prestação,

$$\mathbf{PMT_3: FV_3 = PMT \cdot [1 + i\% \cdot (n-3)]}$$

O valor futuro da penúltima,

$$\mathbf{PMT_{n-1}: FV_{(n-1)} = PMT \cdot [1 + i\%]}$$

O valor futuro da última,

$$\mathbf{PMT_n \rightarrow FV_n = PMT}$$

Se aplicados R\$ 10.000,00 a uma taxa de juros de 5% ao período, por 7 períodos, no regime de capitalização simples:

$$FV_1 = PMT_1 \times [1 + (5\% \times 6)] = PMT_1 \times 1,30$$

$$FV_2 = PMT_2 \times [1 + (5\% \times 5)] = PMT_2 \times 1,25$$

$$FV_3 = PMT_3 \times [1 + (5\% \times 4)] = PMT_3 \times 1,20$$

$$FV_4 = PMT_4 \times [1 + (5\% \times 3)] = PMT_4 \times 1,15$$

$$FV_5 = PMT_5 \times [1 + (5\% \times 2)] = PMT_5 \times 1,10$$

$$FV_6 = PMT_6 \times [1 + (5\% \times 1)] = PMT_6 \times 1,05$$

$$FV_7 = PMT_7 \times [1 + (5\% \times 0)] = PMT_7 \times 1,00$$

$$FV = FV_1 + FV_2 + FV_3 + FV_4 + FV_5 + FV_6 + FV_7$$

$$PMT = PMT_1 = PMT_2 = PMT_3 = PMT_4 = PMT_5 = PMT_6 = PMT_7$$

$$1,30 + 1,25 + 1,20 + 1,15 + 1,10 + 1,05 + 1,00 = 8,05$$

$$FV = PMT \times 8,05$$

$$FV = 13.500,00$$

$$PMT = 1.677,02$$

Em assim sendo, para valor financiado = R\$ 10.000,00, $i\% = 5\%$ ao período, e $n = 7$ períodos, a planilha do Sistema Linear é a seguinte:

MOMENTO	JURO DO PERÍODO	VALOR FUTURO "FV"	JURO SOBRE SALDO DEVEDOR ANTERIOR	PRESTAÇÃO PERIÓDICA	COEFICIENTE	VALOR DA PRESTAÇÃO ATÉ O ÚLTIMO PERÍODO
Σ					8,0500	13.500,00
0		10.000,00				
1	500,00	10.500,00	5,0000%	1.677,02	1,3000	2.180,12
2	500,00	11.000,00	4,7619%	1.677,02	1,2500	2.096,27
3	500,00	11.500,00	4,5455%	1.677,02	1,2000	2.012,42
4	500,00	12.000,00	4,3478%	1.677,02	1,1500	1.928,57
5	500,00	12.500,00	4,1667%	1.677,02	1,1000	1.844,72
6	500,00	13.000,00	4,0000%	1.677,02	1,0500	1.760,87
7	500,00	13.500,00	3,8462%	1.677,02	1,0000	1.677,02

Mantidas as demais condições de taxa de juros, valor do empréstimo e prazo de pagamento da dívida, o valor futuro do empréstimo (a ser amortizado) é de R\$ 13.500,00, para pagamento único ao final do prazo (momento 7), idêntico ao valor da soma do valor atualizado das prestações, cada uma apropriada de forma linear (aritmética) até o término do prazo, não sendo, de modo algum, a mera soma do valor nominal das parcelas, R\$ 11.739,14 (7 prestações em momentos diferentes).

É importante observar que a taxa de crescimento linear nada mais é do que a razão da progressão aritmética, ou seja, 5% ou 0,05.

Com base neste raciocínio, é possível sintetizar uma fórmula geral para cálculo da prestação a juros simples.

O valor futuro (FV) equivale à soma dos termos do fluxo de caixa obtido com a construção algébrica retro.

$$FV = PMT \cdot \{n + i\% \cdot [(n-1) + (n-2) + \dots + 1]\}$$

$[(n-1) + (n-2) + \dots + 1]$ é a soma de uma P.A. decrescente com o primeiro termo

$a_1 = (n-1)$, com $(n-1)$ termos, e o último termo $a_n = 1$.

Aplicando-se a fórmula da soma das PAs, progressões aritméticas:

$$S_{PA} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_{PA} = \frac{\{[(n-1) + 1] \times (n-1)\}}{2}$$

$$FV = PMT \cdot \{n + i\% \cdot \frac{[(n-1) + 1] \cdot (n-1)}{2}\}$$

$$FV = PV \cdot [1 + (i\% \cdot n)]$$

$$PV \times (1 + i\% \cdot n) = PMT \cdot \{n + i\% \cdot \frac{[(n-1) + 1] \cdot (n-1)}{2}\}$$

Em assim sendo, a fórmula geral da prestação obtida pelo Método de Amortização por Juros Simples ou Sistema Linear (pagamento de parcelas periódicas iguais e consecutivas, postecipadas, iguais entre si, de modo a resgatar capital e remunerar a juros simples) é a seguinte:

$$PMT_{js} = \frac{2 \cdot PV \cdot [(i\% \cdot n) + 1]}{[(i\% \cdot n) - i\% + 2] \cdot n}$$

em que:

PMT_{js} = valor da prestação (parcela),

PV = capital tomado emprestado,

$i\%$ = taxa de juros por unidade de tempo em formato % (taxa /100),

n = prazo de utilização em unidade de tempo.

Substituindo os valores, cada prestação será de R\$ 1.677,02, confirmando a perfeita identidade entre a sistemática de juros simples e as progressões aritméticas.

Um empréstimo de R\$ 10.000,00, à taxa de juros de 5% ao período, a ser pago em 7 parcelas iguais, ao final de cada período, para ser totalmente amortizado a juros simples, deve ter como prestação:

$$PMT = \frac{2 \times 10.000,00 \times [(5\% \times 7) + 1]}{\{(5\% \times 7) - 5\% + 2\} \times 7} = 1.677,02$$

Este é o valor que retorna integralmente o capital e os juros simples, através do pagamento de prestações periódicas, iguais e consecutivas, que, sendo todas quitadas, acarreta saldo final igual a zero.

O modelo é cientificamente comprovado, na medida em que o resultado do valor futuro (FV), pela fórmula $FV = PV \cdot [1 + i\% \cdot n]$ seja exatamente igual às somas dos valores futuros (FV) de cada prestação (PMT_{js}).

No Brasil, ao que se tem notícia, os precursores deste sistema de amortização por juros simples foram Luiz Alvaro Ferreira Cavaleiro e Luiz Gomes de San Thiago, que publicaram as fórmulas da prestação e do valor presente a juros simples. Cavaleiro foi autor de diversos livros de Matemática, dentre os quais “Formulário e Tábuas de Matemática Financeira e Estatística” (1944) e “Elementos de Matemática Financeira” (1970). San Thiago publicou “Matemática Comercial e Financeira” (1937), obra póstuma, escrita por seu pai, Rodolpho Baptista de San Thiago.

Com importantes aperfeiçoamentos, seguiram-se:

José Jorge Meschiatti Nogueira, economista, professor universitário da PUC – Pontifícia Universidade Católica de Campinas - SP, e autor de relevantes publicações sobre Matemática Financeira, que também se baseou nos estudos de David Wilkie (1794) e John Carr (1843) sobre amortização a juros simples, trouxe a lume a verdadeira história do sistema de amortização a juros compostos, e fez a prova da perfeição, mediante apresentação do valor presente, do valor futuro e da taxa interna de retorno pelo método linear.

Edson Rovina, professor, escritor, Mestre e Doutor em Programação Matemática pela UFPR – Universidade Federal do Paraná, que, dentre outras importantes demonstrações, comprovou a evolução das razões aritmética e geométrica nas cotas de amortização e juros contidas em cada prestação periódica.

Anísio Costa Castelo Branco, professor, escritor, consultor financeiro, perito judicial em São Paulo – SP, que aperfeiçoou os estudos de seus antecessores, tendo inovado o cálculo do valor presente a juros simples, prestação por prestação.

Empiricamente, o autor deste estudo também já desenvolvia planilhas sobre amortização a juros simples, desde a década de 90.

Sob a ótica de CAVALHEIRO (1983):

M = montante ou valor futuro

P = prestação

C = capital inicial

n = prazo

$$M = \frac{\{P \cdot \{2 + [i\% \cdot (n-1)]\} \cdot n\}}{2}$$

$$P = \frac{M \cdot 2}{\{2 + [i\% \cdot (n-1) \cdot n]\}}$$

$$M = P \cdot \frac{\{1 + [i\% \cdot (n-1)]\}}{2}$$

$$M = C \cdot [1 + (i\% \cdot n)]$$

$$M = 10.000,00 \times [1 + (5\% \times 7)] = 10.000,00 \times 1,35$$

$$M = 13.500,00$$

$$C \cdot [1 + (i\% \cdot n)] = P \cdot \left\{1 + \left[\frac{i\% \cdot (n-1)}{2}\right]\right\}$$

$$C = P \cdot \frac{\{n \cdot 1 + [i\% \cdot (n-1) / 2]\}}{[1 + (i\% \cdot n)]}$$

$$P = \frac{C \cdot [1 + (i\% \cdot n)]}{\{n \cdot 1 + [i\% \cdot \frac{(n-1)}{2}]\}}$$

$$P = 10.000,00 \times [1 + (5\% \times 7)] / \{\{7 \times \{1 + \{[5\% \times (7-1)]\} / 2\}\}\}$$

$$P = 10.000,00 \times 1,35 / \{7 \times 1,15\} = 13.500,00 / 8,05$$

$$P = 1.677,02$$

Alcio Manoel de Sousa Figueiredo, advogado e professor universitário da UFPR – Universidade Federal do Paraná, autor de diversos livros sobre finanças, também demonstrou a validade do sistema de amortização a juros simples (FIGUEIREDO, 2008).

1 - Calcula-se o índice médio do financiamento

$$\{[(\text{taxa de juros} \times \text{prazo menos } 1) + 1] + 1\} / 2$$

2 - Calcula-se o capital remunerado

CR → capital + juros simples ou lineares do financiamento

3 - Calcula-se o valor da prestação

(capital + juro do financiamento) / (índice médio x prazo)

Capital = 10.000; taxa = 5%; prazo = 7

$$IM = \frac{\{i\% \cdot (n-1) + 1\} + 1}{2}$$

$$IM = \{[0,05 \times (7-1) + 1] + 1\} / 2 = [0,05 \times (6) + 1] + 1\} / 2$$

$$IM = \{[0,30 + 1] + 1\} / 2 = \{[1,30] + 1\} / 2 = 2,30 / 2$$

$$IM = 1,15$$

$$CR = PV \cdot [(i\% \cdot n) + 1]$$

$$CR = 10.000,00 \times [(0,05 \times 7) + 1] = 10.000,00 \times [0,35 + 1]$$

$$CR = 10.000,00 \times 1,35$$

$$CR = 13.500,00$$

$$PMT = \frac{CR}{(IM \cdot n)}$$

$$PMT = \frac{13.500,00}{(1,15 \times 7)}$$

$$PMT = \frac{13.500,00}{8,05}$$

$$PMT = 1.677,02$$

Frank Michael Forger, professor titular do Departamento de Matemática Aplicada (MAP) do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo (USP), também desenvolveu estudos sobre o regime de Capitalização por Juros Simples (CJS), através do qual pode-se separar o saldo capitalizável (SC), base de cálculo constante para a incidência dos juros simples, e o saldo não capitalizável (SNC), que é a verba com crescimento linear, em que são lançados e somados os juros simples (FORGER, 2009).

O saldo tradicional passa a ser a soma dos dois, também chamada de saldo total. Os juros devidos na data de vencimento de cada parcela incidem sobre o saldo capitalizável da data de vencimento da parcela imediatamente anterior, mas são incluídos no saldo não capitalizável, sobre o qual não incide juro nenhum. Finalmente, os dois subsaldos são unificados no momento do encerramento ou da quitação do contrato.

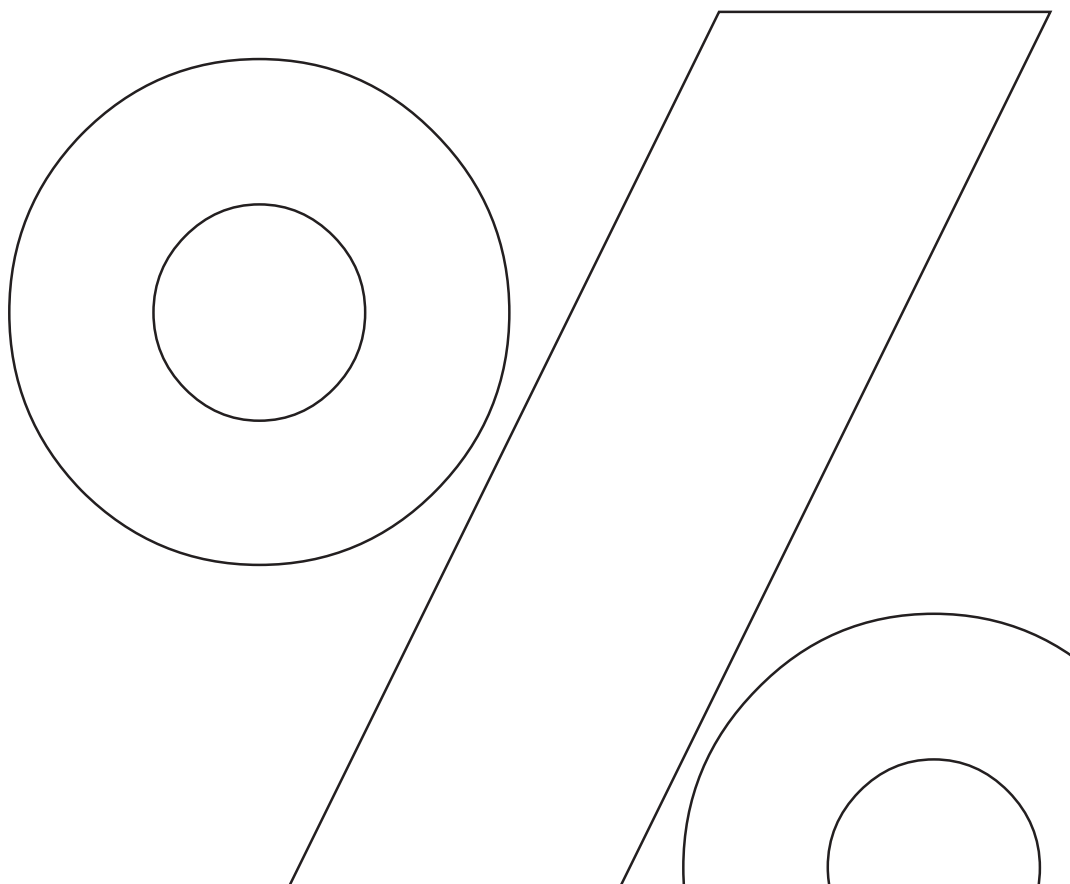
A qualquer período, o saldo devedor será a soma do saldo capitalizável (SC) com o saldo não capitalizável (SNC).

Combinando este método com a ferramenta chamada de fator de ponderação, pode-se adaptar qualquer sistema de amortização originalmente desenvolvido para o regime de juros compostos (capitalização exponencial) ao regime de juros simples (capitalização linear), adequando-o assim à proibição da capitalização dos juros.

Ao final, o objetivo a ser atendido é o preceito do equilíbrio das contas no final do contrato, em que o capital inicial, devidamente capitalizado, deve ser igual à soma de todas as prestações, cada uma também devidamente capitalizada, de modo que, no momento do encerramento do contrato, todos os saldos devedores devem estar zerados.

CAPÍTULO 13

PRESTAÇÃO A JUROS SIMPLES COM BASE NO VALOR FUTURO



PRESTAÇÃO A JUROS SIMPLES, COM BASE NO VALOR FUTURO

Considere-se que, à taxa de juros de 5% ao período, capitalização simples, há 7 prestações consecutivas, postecipadas, cada uma de R\$ 1.677,02 a serem pagas.

Se for necessário apurar qual o valor futuro, a partir da fórmula do item anterior.

$$FV_{JS} = PMT_{JS} \cdot \left\{ \left[1 + \frac{i\% \cdot (n - 1)}{2} \right] \cdot n \right\}$$

$$FV_{JS} = 1.677,02 \times \left\{ \left[1 + \frac{5\% \times (7 - 1)}{2} \right] \times 7 \right\}$$

$$FV_{JS} = 1.677,02 \times \left\{ \left[1 + \frac{5\% \times (6)}{2} \right] \times 7 \right\}$$

$$FV_{JS} = 1.677,02 \times \left\{ \left[1 + \frac{30\%}{2} \right] \times 7 \right\}$$

$$FV_{JS} = 1.677,02 \times [1 + 15\%] \times 7$$

$$FV_{JS} = 1.677,02 \times 1,15 \times 7$$

$$FV_{JS} = 1.677,02 \cdot 8,05$$

$$FV_{JS} = 13.500,00$$

Assim, é possível obter uma variante para a fórmula da prestação periódica.

$$PMT_{JS} = \frac{FV_{JS}}{\left[1 + \left(i\% \cdot \frac{n - 1}{2} \right) \right] \cdot n}$$

$$FV_{JS} = PV \cdot [1 + (i\% \cdot n)]$$

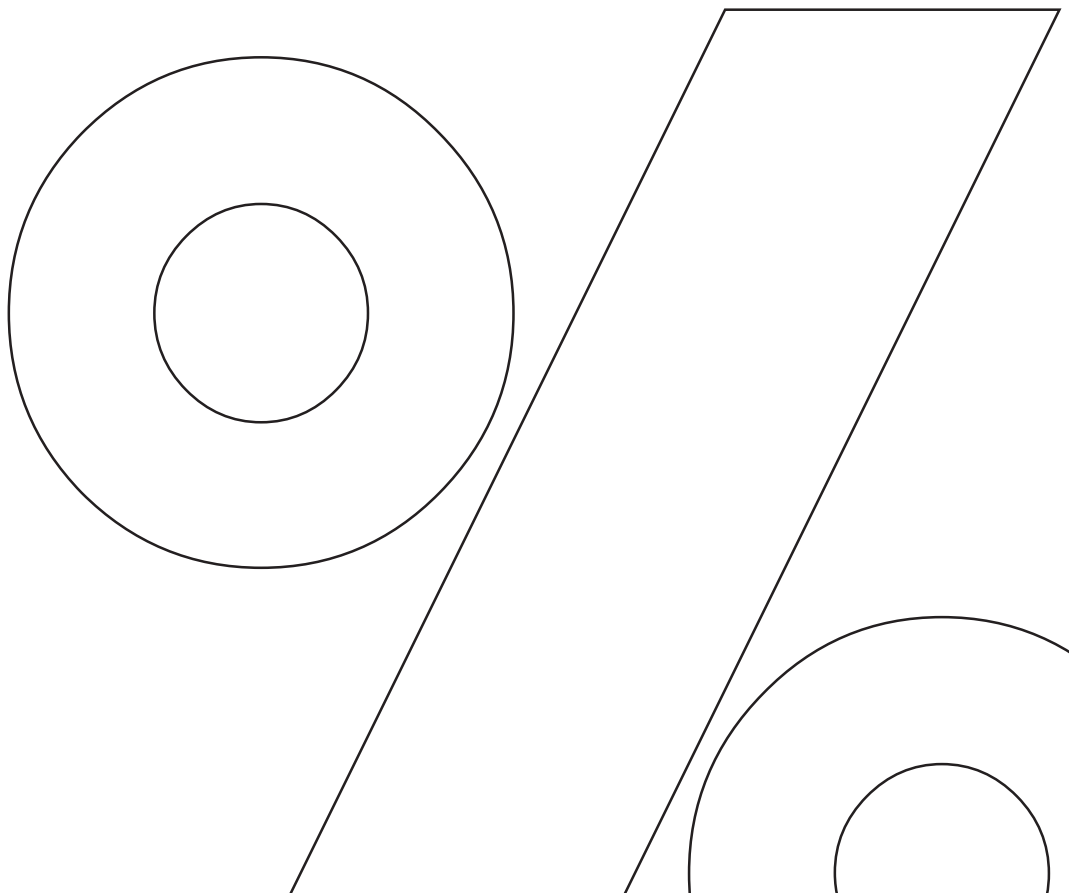
$$PMT_{JS} = \frac{PV \cdot [1 + (i\% \cdot n)]}{\left[1 + \left(i\% \cdot \frac{n - 1}{2} \right) \right] \cdot n}$$

$$PMT_{JS} = \frac{PV \cdot [1 + (i\% \cdot n)]}{n \cdot \left\{ 1 + \left[\frac{(n - 1)}{2} \cdot i\% \right] \right\}}$$

$$PMT_{JS} = \frac{10.000,00 \times [1 + (5\% \times 7)]}{7 \times \{1 + [(7 - 1) \times 5\% / 2]\}} = 1.677,02$$

CAPÍTULO 14

VALOR PRESENTE A JUROS SIMPLES



VALOR PRESENTE A JUROS SIMPLES

Considere-se que, à taxa de juros de 5% ao período, juros simples, há 7 prestações consecutivas, postecipadas, cada uma de R\$ 1.677,02 a serem pagas. Qual foi o valor financiado, equivalente ao valor presente?

Cada prestação deve ser descapitalizada pelo número de períodos que a equipare ao valor presente, no momento zero.

PMT_{js} = prestação a juros simples

PV = valor presente

$i\%$ = taxa de juros

n = prazo

$$FV_{js} = \frac{PMT_{js}}{1 + (i\% \cdot \frac{n-1}{2}) \cdot n}$$

$$PV = \frac{PMT_{js} \cdot [1 + (i\% \cdot \frac{n-1}{2})] \cdot n}{1 + (i\% \cdot n)}$$

$$PMT_{js} = 1.677,02; i\% = 5\%; n = 7; PV = ?$$

$$PV = \{1.677,02 \times \{[1 + (5\% \times (7-1)) / 2] \times 7\} / \{[1 + (5\% \times 7)]\}$$

$$PV = \{1.677,02 \times \{[1 + (5\% \times (6)) / 2] \times 7\} / \{[1 + (0,35)]\}$$

$$PV = \{1.677,02 \times \{[1 + (0,30) / 2] \times 7\} / \{[1,35]\}$$

$$PV = \{1.677,02 \times \{[1 + 0,15] \times 7\} / \{[1,35]\}$$

$$PV = \{1.677,02 \times \{[1,15] \times 7\} / \{[1,35]\}$$

$$PV = \{1.677,02 \times \{[8,05] / \{[1,35]\}$$

$$PV = \{1.677,02 \times \{5,96296296\}$$

$$PV = 10.000,00.$$

Conforme CASTELO BRANCO (2010), também é possível obter o valor presente, mediante decomposição de cada uma das prestações periódicas, a partir do seu respectivo momento de ocorrência:

$$PV_{js} = \frac{PMT_{js} \cdot [1 + (i\% \cdot n_m - 1)]}{1 + (i\% \cdot n)}$$

$$\begin{aligned}
 PV_1 &= 1.677,02 \times [1 + 0,05 \times (1-1) / 1 + 0,05 \times 7] = \\
 1.677,02 \times [1+0,05 \times (0) / 1 + 0,35] &= 1.677,02 \times [1 + 0 / 1,35] = \\
 1.677,02 \times [1 / 1,35] &= 1.677,02 \times 0,74074... = 1.242,24
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 PV_2 &= 1.677,02 \times [1 + 0,05 \times (2-1) / 1 + 0,05 \times 7] = \\
 1.677,02 \times [1+0,05 \times (1) / 1 + 0,35] &= 1.677,02 \times [1 + 0,05 / 1,35] = \\
 1.677,02 \times [1,05 / 1,35] &= 1.677,02 \times 0,77777... = 1.304,35
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 PV_3 &= 1.677,02 \times [1 + 0,05 \times (3-1) / 1 + 0,05 \times 7] = \\
 1.677,02 \times [1+0,05 \times (2) / 1 + 0,35] &= 1.677,02 \times [1 + 0,10 / 1,35] = \\
 1.677,02 \times [1,10 / 1,35] &= 1.677,02 \times 0,81481... = 1.366,46
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 PV_4 &= 1.677,02 \times [1 + 0,05 \times (4-1) / 1 + 0,05 \times 7] = \\
 1.677,02 \times [1+0,05 \times (3) / 1 + 0,35] &= 1.677,02 \times [1 + 0,15 / 1,35] = \\
 1.677,02 \times [1,15 / 1,35] &= 1.677,02 \times 0,85185... = 1.428,57
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 PV_5 &= 1.677,02 \times [1 + 0,05 \times (5-1) / 1 + 0,05 \times 7] = \\
 1.677,02 \times [1+0,05 \times (4) / 1 + 0,35] &= 1.677,02 \times [1 + 0,20 / 1,35] = \\
 1.677,02 \times [1,20 / 1,35] &= 1.677,02 \times 0,88888... = 1.490,68
 \end{aligned}$$

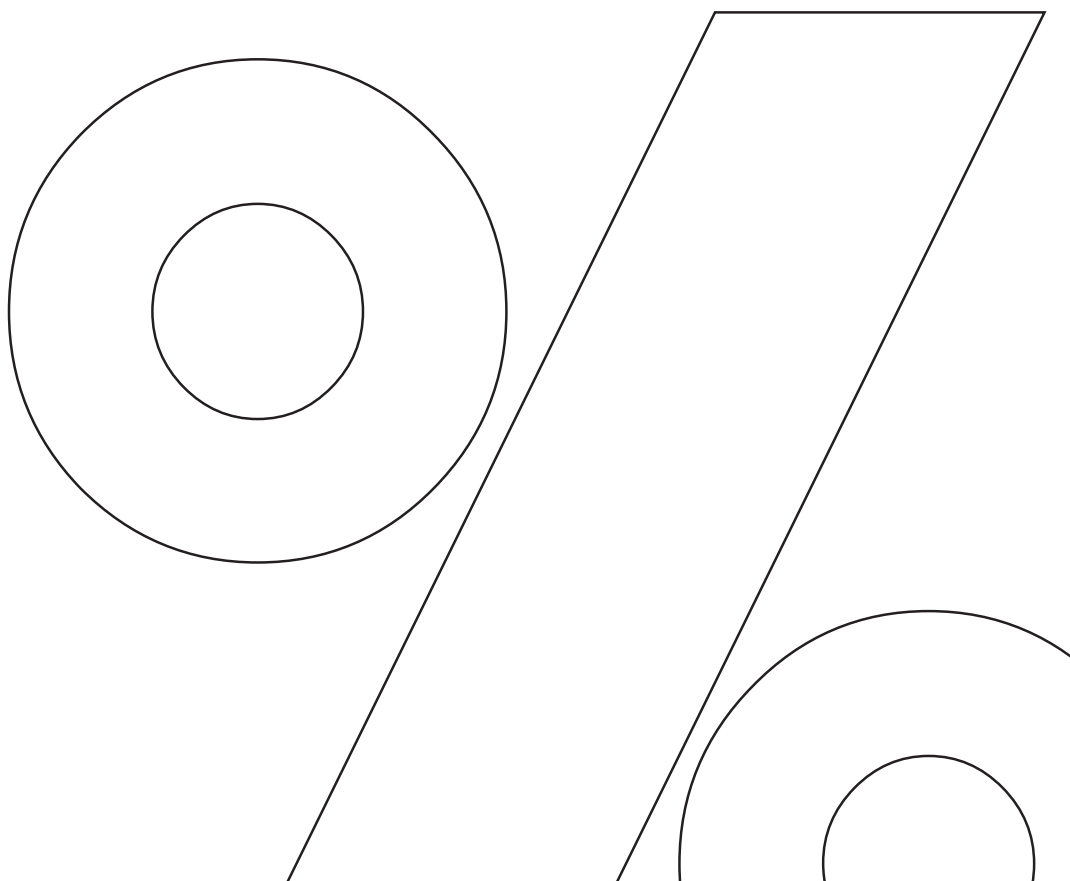
$$\begin{aligned}
 PV_6 &= 1.677,02 \times [1 + 0,05 \times (6-1) / 1 + 0,05 \times 7] = \\
 1.677,02 \times [1+0,05 \times (5) / 1 + 0,35] &= 1.677,02 \times [1 + 0,25 / 1,35] = \\
 1.677,02 \times [1,25 / 1,35] &= 1.677,02 \times 0,92592... = 1.552,80
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 PV_7 &= 1.677,02 \times [1 + 0,05 \times (7-1) / 1 + 0,05 \times 7] = \\
 1.677,02 \times [1+0,05 \times (6) / 1 + 0,35] &= 1.677,02 \times [1 + 0,30 / 1,35] = \\
 1.677,02 \times [1,30 / 1,35] &= 1.677,02 \times 0,96296... = 1.614,91
 \end{aligned}$$

$$PV_1 + PV_2 + PV_3 + PV_4 + PV_5 + PV_6 + PV_7 = 10.000,00$$

CAPÍTULO 15

TAXA INTERNA DE RETORNO A JUROS SIMPLES



TAXA INTERNA DE RETORNO A JUROS SIMPLES

A partir das fórmulas retro, e conhecidos os valores do valor presente, da prestação, e do prazo da operação, é possível determinar a taxa interna de retorno - TIR_{js} .

$$TIR_{js} = \frac{\frac{2 - PV \cdot 2}{PMT_{js} \cdot n}}{[n \cdot (\frac{PV \cdot 2}{PMT_{js} \cdot n})] - (n - 1)}$$

$$TIR_{js} = \frac{[2 - (10.000,00 \times 2) / (1.677,02 \times 7)]}{[7 \times (10.000,00 \times 2 / 1.677,02 \times 7)] - (7-1)}$$

$$TIR_{js} = \frac{[2 - (20.000,00) / (11.739,1304)]}{[7 \times (20.000,00 / 11.739,1304)] - (6)}$$

$$TIR_{js} = [2 - (1,70370...)] / \{[7 \times (1,70370...)] - (6)\}$$

$$TIR_{js} = 0,2963... / (11,92592... - 6)$$

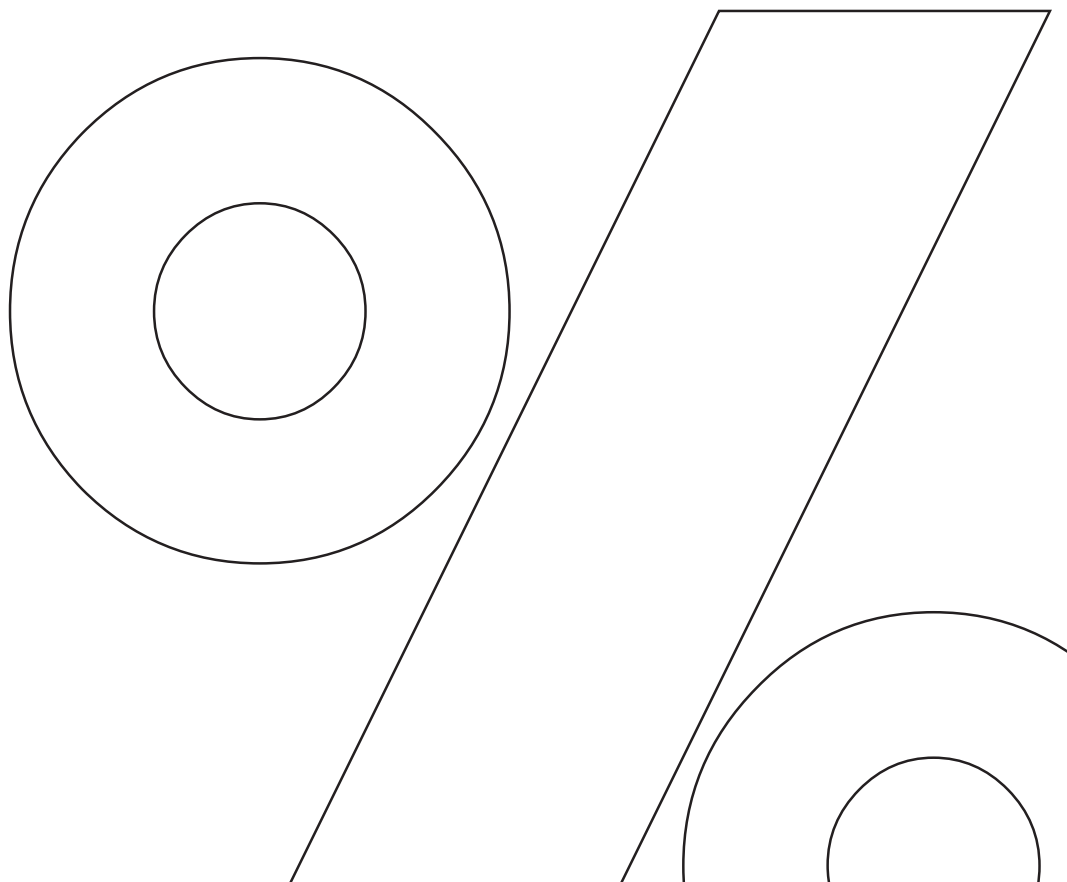
$$TIR_{js} = 0,2963 / 5,92592$$

$$TIR_{js} = 0,05 \text{ ou } 5\% \text{ ao período}$$

Esta é a prova real de que a prestação de valor R\$ 1.677,02 é a única que corresponde aos pressupostos da aplicação de juros simples, tanto sob o prisma do valor futuro (FV) quanto do valor presente (PV), além da taxa interna de retorno (TIR), e que a sistemática é congruente com o conceito de progressões aritméticas.

CAPÍTULO 16

AMORTIZAÇÃO E JURO NAS PRESTAÇÕES POR JUROS COMPOSTOS



AMORTIZAÇÃO E JURO NAS PRESTAÇÕES POR JUROS COMPOSTOS

Para efeito de quitação de empréstimo ou resgate de investimento, seria suficiente tão só o cálculo do valor da prestação, que se compõe de capital mais juros de forma indistinta.

Mas, em função de conveniência ou necessidade contábil-jurídico-econômico-fiscal, houve-se por bem fazer a separação da parcela de juros da parcela de amortização, dentro de cada prestação periódica, tendo em vista que os juros são parcelas dedutíveis, para efeitos de apuração de resultados.

A prestação é o pagamento feito em série, e contém parcela de juros (sobre o capital do período anterior) (J) e outra de amortização (parte do capital liquidado) (A), correspondentes a determinado período:

$$\text{PMT} = A + J$$

Inicialmente, observe-se que, no fluxo de caixa do valor futuro, por juros compostos, o valor do juro cresce a cada período, pois é resultante do produto entre o saldo devedor do período imediatamente anterior pela taxa de juros.

Em assim sendo, a cada período, o valor da taxa de juro periódico é proporcional e percentualmente igual a cada saldo devedor sucessivo acumulado.

MOMENTO	JURO DO PERÍODO	% SOBRE SALDO ANTERIOR	VALOR FUTURO "FV"
0			10.000,00
1	500,00	5,0000%	10.500,00
2	525,00	5,0000%	11.025,00
3	551,25	5,0000%	11.576,25
4	578,81	5,0000%	12.155,06
5	607,75	5,0000%	12.762,82
6	638,14	5,0000%	13.400,96
7	670,05	5,0000%	14.071,00

Recorde-se que, em Matemática Financeira, dois valores são iguais se estiverem na mesma data focal. Se ocorrerem em momentos diferentes, os números não representam o mesmo valor.

Qual o valor da prestação periódica, postecipada, para liquidar um empréstimo de R\$ 10.000,00, à taxa de 5% ao período, mediante juros compostos, para ser pago em 7 prestações? O resultado é R\$ 1.728,20, conforme visto anteriormente.

Importante notar que os juros capitalizados já foram incorporados ao valor unitário das prestações.

Quanto de capital e quanto de juros há na prestação de cada período respectivo?

Para juros compostos, aplicam-se os postulados das progressões geométricas.

A soma das parcelas de capital contido em cada uma das prestações deve ser igual ao capital inicial.

Na fórmula da soma dos termos da PG:

$$S_{PG} = a_1 \cdot \frac{q^{n-1}}{q-1}$$

A soma SPG equivale ao capital emprestado = 10.000,00; “n” ao total do prazo do empréstimo ou número de prestações = 7; a taxa de crescimento da PG, a razão “q”, ao fator de capitalização da taxa de juros do empréstimo = 1 + 5%.

A incógnita é o primeiro termo da PG:

$$a_1 = ?$$

Aplicando a fórmula:

$$10.000,00 = \frac{a_1 \cdot [(1+5\%)^7 - 1]}{(1+5\%) - 1}$$

A cota de capital (parcela de amortização) contida na primeira prestação é:

$$a_1 = \frac{10.000,00 \times 0,05}{0,4071}$$

$$a_1 = 1.228,20$$

Aplicando a fórmula geral de apuração de qualquer um dos termos da P.G.:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

$a_n \rightarrow$ n-ésimo termo; $a_1 \rightarrow$ primeiro termo; $q \rightarrow$ razão $(1 + i\%)$ (fator de capitalização); $n \rightarrow$ quantidade de termos.

Na segunda prestação, a parcela de amortização é:

$$a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} = 1.228,20 \times 1,05^1 = 1.228,20 \times 1,0500 = 1.289,61$$

Na terceira prestação:

$$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} = 1.228,20 \times 1,05^2 = 1.228,20 \times 1,1025 = 1.354,09$$

Na quarta prestação:

$$a_4 = a_1 \cdot q^{4-1} = 1.228,20 \times 1,05^3 = 1.228,20 \times 1,1576 = 1.421,79$$

Na quinta prestação:

$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} = 1.228,20 \times 1,05^4 = 1.228,20 \times 1,2155 = 1.492,88$$

Na sexta prestação:

$$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} = 1.228,20 \times 1,05^5 = 1.228,20 \times 1,2763 = 1.567,53$$

Na sétima prestação:

$$a_7 = a_1 \cdot q^{7-1} = 1.228,20 \times 1,05^6 = 1.228,20 \times 1,3401 = 1.645,90$$

A soma destes valores parciais das parcelas de amortização é igual ao capital emprestado, de R\$ 10.000,00.

O valor futuro é igual à soma entre o valor presente e os juros apurados.

$$\mathbf{FV = PV + J}$$

$$\mathbf{FV = PV \cdot (1+i\%)^n}$$

$$\mathbf{PV + J = PV \cdot (1+i\%)^n}$$

$$\mathbf{J = PV \cdot (1+i\%)^n - PV}$$

A razão da progressão geométrica “q” é expressa por $1 + i\%$, neste caso, $(1 + 5\%)$ ou 1,05 e se identifica a sua presença nos termos da PG, que expressa juros capitalizados, $FV = PV \cdot (1 + i\%)^n$, em especial o “n” como expoente.

Os juros em cada período equivalem à diferença entre o valor fixo da prestação e a cota de amortização respectiva.

A amortização cresce na medida da razão da PG. O juro, de forma inversa.

A parcela de juros capitalizados é apurada da maneira que segue.

Na primeira prestação:

$$J_1 = a_1 \cdot (1+i\%)^7 - a_1 = 1.228,20 \times 1,05^7 - 1.228,20 = 1.228,20 \times 1,4071 - 1.228,20$$

$$J_1 = 500,00 \quad \text{ou} \quad J_1 = 1.728,20 - 1.228,20 = 500,00.$$

Na segunda prestação:

$$J_2 = a_2 \cdot (1+i\%)^6 - a_2 = 1.289,61 \times 1,05^6 - 1.289,61 = 1.289,61 \times 1,3401 - 1.289,61$$

$$J_2 = 438,59 \quad \text{ou} \quad J_2 = 1.728,20 - 1.289,61 = 438,59.$$

Na terceira prestação:

$$J_3 = a_3 \cdot (1+i\%)^5 - a_3 = 1.354,08 \times 1,05^5 - 1.354,08 = 1.354,08 \times 1,2763 - 1.354,08$$

$$J_3 = 374,11 \quad \text{ou} \quad J_3 = 1.728,20 - 1.354,08 = 374,11.$$

Na quarta prestação:

$$J_4 = a_4 \cdot (1+i\%)^4 - a_4 = 1.421,78 \times 1,05^4 - 1.421,78 = 1.421,78 \times 1,2155 - 1.421,78$$

$$J_4 = 306,41 \quad \text{ou} \quad J_4 = 1.728,20 - 1.421,78 = 306,41.$$

Na quinta prestação:

$$J_5 = a_5 \cdot (1+i\%)^3 - a_5 = 1.492,89 \times 1,05^3 - 1.492,89 = 1.492,89 \times 1,1576 - 1.492,89$$

$$J_5 = 235,32 \quad \text{ou} \quad J_5 = 1.728,20 - 1.492,89 = 235,32.$$

Na sexta prestação:

$$J_6 = a_6 \cdot (1+i\%)^2 - a_6 = 1.567,54 \times 1,05^2 - 1.567,54 = 1.567,54 \times 1,1025 - 1.567,54$$

$$J_6 = 160,67 \quad \text{ou} \quad J_6 = 1.728,20 - 1.567,54 = 160,67.$$

Na sétima prestação:

$$J_7 = a_7 \cdot (1+i\%)^1 - a_7 = 1.645,91 \times 1,05^1 - 1.645,91 = 1.645,91 \times 1,0500 - 1.645,91$$

$$J_7 = 82,30 \quad \text{ou} \quad J_7 = 1.728,20 - 1.645,91 = 82,30.$$

Em cada momento, a soma da cota de capital (parcela de amortização) com os juros capitalizados, deve ser igual ao valor unitário da prestação.

$$PMT_1 = a_1 + J_1 = 1.228,20 + 500,00 = 1.728,20$$

$$PMT_2 = a_2 + J_2 = 1.289,61 + 438,59 = 1.728,20$$

$$PMT_3 = a_3 + J_3 = 1.354,08 + 374,12 = 1.728,20$$

$$PMT_4 = a_4 + J_4 = 1.421,78 + 306,42 = 1.728,20$$

$$PMT_5 = a_5 + J_5 = 1.492,89 + 235,31 = 1.728,20$$

$$PMT_6 = a_6 + J_6 = 1.567,54 + 160,66 = 1.728,20$$

$$PMT_7 = a_7 + J_7 = 1.645,90 + 82,30 = 1.728,20$$

Desta forma, mais uma vez, resta demonstrada perfeita identidade entre juros compostos e progressões geométricas.

Comprovada a obtenção do valor da prestação através do desenvolvimento algébrico, é possível sistematizar este cálculo para quaisquer situações de capital, taxa e prazo.

Uma vez obtida a prestação, mediante aplicação da fórmula geral.

$$PMT_{jc} = \frac{PV \cdot i\% \cdot (1 + i\%)^n}{(1 + i\%)^n - 1}$$

a planilha contábil de evolução da dívida originada pelo Método de Juros Compostos expressa o seguinte procedimento padrão: (1) multiplicar o saldo devedor do período anterior pela taxa de juros, para se obter o valor do juro embutido na parcela; (2) subtrair do valor a ser pago o juro para se obter a cota de amortização; (3) subtrair do saldo devedor do período anterior o valor da cota de amortização, para se obter o valor do saldo devedor no período atual. Repete-se os passos 1, 2 e 3, até a data focal “n”.

O procedimento padrão retro informado representa um algoritmo, que corresponde a um conjunto de regras e operações próprias para se fazer um cálculo, realizar certa tarefa ou resolver um problema.

MOMENTO	PRESTAÇÃO PERIÓDICA	JURO NA PRESTAÇÃO	AMORTIZAÇÃO NA PRESTAÇÃO	SALDO DEVEDOR RESIDUAL
0				10.000,00
1	1.728,20	500,00	1.228,20	8.771,80
2	1.728,20	438,59	1.289,61	7.482,19
3	1.728,20	374,12	1.354,08	6.128,11
4	1.728,20	306,42	1.421,78	4.706,31
5	1.728,20	235,31	1.492,89	3.213,43
6	1.728,20	160,66	1.567,54	1.645,90
7	1.728,20	82,30	1.645,90	-

Com base na tabela retro, qual seria o juro da quarta parcela, depois de paga a terceira?

Deduzindo as três parcelas pagas do capital:

$$10.000,00 - (3 \times 1.728,20) = 4.815,40.$$

Adicionando o juro sobre juro vencido e pago de 3 períodos:

$$4.815,40 + 500,00 + 438,59 + 374,11 = 6.128,11.$$

O juro do quarto período é:

$$6.128,11 \times 5\% = 306,41.$$

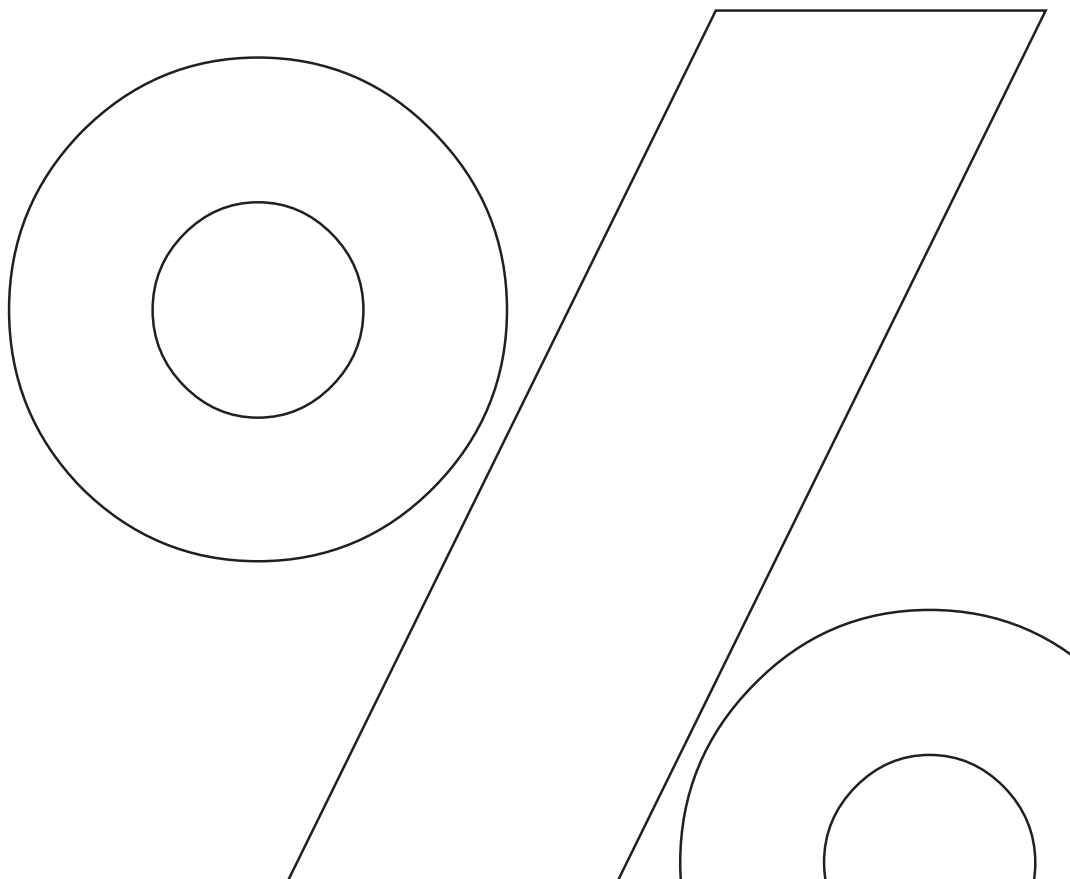
Ou deduz-se as 3 amortizações pagas

$$10.000,00 - 1.228,20 - 1.289,61 - 1.354,09 = 6.128,11 \times 5\% = 306,41.$$

O juro resultante foi obtido sobre o capital mais juro sobre juro.

CAPÍTULO 17

AMORTIZAÇÃO E JURO NAS PRESTAÇÕES POR JUROS SIMPLES



AMORTIZAÇÃO E JURO NAS PRESTAÇÕES POR JUROS SIMPLES

A prestação é o pagamento feito em série, e contém parcela de juros (sobre o capital do período anterior) (J) e outra de amortização (parte do capital liquidado) (A), correspondentes a determinado período:

$$\text{PMT} = A + J$$

No fluxo de caixa para evolução do valor futuro, a juros simples, o juro periódico se mantém o mesmo somente em relação ao capital inicial, pois é resultante do produto entre esta verba e a taxa.

Em assim sendo, a cada período, o valor fixo do juro periódico é proporcionalmente menor a cada saldo devedor sucessivo acumulado.

MOMENTO	JURO DO PERÍODO	VALOR FUTURO "FV"	JURO SOBRE SALDO DEVEDOR ANTERIOR
0		10.000,00	
1	500,00	10.500,00	5,0000%
2	500,00	11.000,00	4,7619%
3	500,00	11.500,00	4,5455%
4	500,00	12.000,00	4,3478%
5	500,00	12.500,00	4,1667%
6	500,00	13.000,00	4,0000%
7	500,00	13.500,00	3,8462%

Em uma série de pagamentos, submetida a juros simples, a razão (a cota de acréscimo periódico) corresponde ao valor do juro periódico. Neste caso, 500,00.

O total a ser pago corresponde à multiplicação do encargo assim definido pelo prazo do financiamento: $7 \times 500,00 = 3.500,00$.

Qual o valor da prestação periódica, postecipada, para liquidar um empréstimo de R\$ 10.000,00, à taxa de 5% ao período, mediante juros simples, para ser pago em 7 prestações? O resultado é R\$ 1.677,02, conforme visto anteriormente.

Importante notar que os juros simples já foram incorporados ao valor unitário das prestações.

Quanto de capital e quanto de juros há na prestação de cada período respectivo?

Para juros simples, aplicam-se os postulados das progressões aritméticas.

A soma das parcelas de capital (cotas de amortização) contido em cada uma das prestações deve ser igual ao capital inicial.

Na fórmula da soma dos termos da PA,

$$S_{PA} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

S_{PA} equivale ao capital emprestado = 10.000,00; “n” ao total do prazo do empréstimo ou número de prestações = 7; a taxa de crescimento da PA, a razão “r”, à taxa de juros do empréstimo = 5%.

A incógnita é o primeiro termo da PA:

$$a_1 = ?$$

Aplicando a fórmula:

$$\rightarrow 10.000,00 = \frac{[(a_1 + a_7) \cdot 7]}{2}$$

$$\rightarrow \frac{10.000 \times 7}{2} = (a_1 + a_7)$$

$$\rightarrow \frac{20.000}{7} = a_1 + a_7$$

$$a_n = a_1 + [(n-1) \cdot r]$$

$$a_7 = a_1 + (7-1) \cdot r$$

$$a_7 = a_1 + (6 \cdot r)$$

$$r = a_1 \cdot \{ [1 + (i\% \cdot n)] - 1 \}$$

Para $n = 1$ (um período); taxa de juros de 5%

$$r = a_1 \times \{ [1 + (5\% \times 1)] - 1 \}$$

A razão é igual ao produto da primeira cota de amortização pela taxa periódica de juros:

$$r = a_1 \times 5\%$$

$$\frac{20.000,00}{7} = a_1 + a_3$$

$$A_7 = a_1 + (6 \cdot r)$$

$$r = a_1 \times 5\%$$

As cotas de amortização crescem em forma de PA.

A cota de capital (parcela de amortização) contida na primeira prestação é:

$$\frac{20.000,00}{7} = a_1 + a_1 + [6 \times (a_1 \times 5\%)] \rightarrow 2.857,14 = 2,30 \times a_1$$

$$a_1 = 1.242,24$$

O valor da razão da PA é:

$$r = a_1 \times 5\% \rightarrow r = 1.242,24 \times 5\%$$

$$r = 62,11\ldots$$

$$a_n = a_1 + [(n - 1) \cdot r]$$

Na sétima prestação, a cota de capital é:

$$\frac{20.000,00}{7} = a_1 + a_7$$

$$\frac{20.000,00}{7} = 1.242,24 + a_7 \rightarrow a_7 = 2.857,14 - 1.242,24$$

$$a_7 = 1.614,91$$

A parcela de amortização, na **segunda prestação** é:

$$a_2 = 1.242,24 + [(2-1) \times 62,11] = 1.304,35$$

Na terceira prestação:

$$a_3 = 1.242,24 + [(3-1) \times 62,11] = 1.366,46$$

Na quarta prestação:

$$a_4 = 1.242,24 + [(4-1) \times 62,11] = 1.428,57$$

Na quinta prestação:

$$a_5 = 1.242,24 + [(5-1) \times 62,11] = 1.490,68$$

Na sexta prestação:

$$a_6 = 1.242,24 + [(6-1) \times 62,11] = 1.552,80$$

Na sétima prestação, confirmando:

$$a_7 = 1.242,24 + [(7-1) \times 62,11] = 1.614,91$$

A soma destes valores parciais das parcelas de amortização é igual ao capital emprestado, de R\$ 10.000,00.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 10.000,00$$

O valor futuro é igual à soma entre o valor presente e os juros apurados.

$$FV = PV + J$$

$$FV = PV \cdot [1 + (i \cdot n)]$$

$$PV + J = PV \cdot [1 + (i \cdot n)]$$

$$J = PV \cdot i\% \cdot n$$

Tal como em qualquer sistema de amortização, o valor dos juros é a diferença entre os valores da prestação e da cota de amortização.

Dado que a prestação é de valor fixo, uniforme, e a cota de amortização cresce de acordo com a razão da PA, a cota de juros decresce na mesma proporção, e, também, podem ser determinados mediante uso desta mesma constante.

Em cada uma das prestações, a parcela de juros simples equivale a:

Na primeira prestação:

$$J_1 = a_1 \cdot i\% \cdot n = 1.242,24 \times 5\% \times 7 = 434,78$$

ou

$$J_1 = 1.677,02 - 1.242,24 = 434,78$$

Na segunda prestação:

$$J_2 = J_1 + [(n-1) \cdot r] = 434,78 + (2-1) \times (-62,11) = 434,78 - 62,11 = 372,67$$

ou

$$J_2 = 1.677,02 - 1.304,35 = 372,67$$

Na terceira prestação:

$$J_3 = J_1 + [(n-1) \cdot r] = 434,78 + (3-1) \times (-62,11) = 434,78 - 124,22 = 310,56$$

ou

$$J_3 = 1.677,02 - 1.366,46 = 310,56$$

Na quarta prestação:

$$J_4 = J_1 + [(n-1) \cdot r] = 434,78 + (4-1) \times (-62,11) = 434,78 - 186,35 = 248,45$$

ou

$$J_4 = 1.677,02 - 1.428,57 = 248,45$$

Na quinta prestação:

$$J_5 = J_1 + [(n-1) \cdot r] = 434,78 + (5-1) \times (-62,11) = 434,78 - 248,44 = 186,34$$

ou

$$J_5 = 1.677,02 - 1.490,68 = 186,34$$

Na sexta prestação:

$$J_6 = J_1 + [(n-1) \cdot r] = 434,78 + (6-1) \times (-62,11) = 434,78 - 310,55 = 124,22$$

ou

$$J_6 = 1.677,02 - 1.552,80 = 124,22$$

Na sétima prestação:

$$J_7 = J_1 + [(n-1) \cdot r] = 434,78 + (7-1) \times (-62,11) = 434,78 - 372,67 = 62,11$$

ou

$$J_7 = 1.677,02 - 1.614,91 = 62,11$$

Naturalmente, tendo em vista o expurgo do efeito exponencial e a adoção da forma linear de apropriação, a parcela de juros de cada prestação, relativa aos juros simples, é gradativamente menor do que a dos juros compostos.

Isto porque, para quitar o empréstimo a juros simples, é necessário juro menor do que no sistema a juros compostos.

Cabe lembrar que, em progressão aritmética, o crescimento é linear, ou seja, a razão é somada a cada termo anterior, enquanto em progressão geométrica, o crescimento é exponencial, ou seja, a razão é multiplicada pelo termo anterior. Logicamente, a multiplicação implica em crescimento mais acentuado do valor da série de termos.

Na primeira prestação, ao invés de 500,00, 434,78. Na segunda prestação, 438,59 x 372,67. Na terceira prestação, 374,11 x 310,56. Na quarta prestação, 306,41 x 248,45. Na quinta prestação, 235,32 x 186,34. Na sexta prestação, 160,67 x 124,22. Na sétima prestação, 82,30 x 62,11.

A razão da progressão aritmética “r” é expressa por 62,11..., e se identifica a sua presença nos termos da PA, que expressa juros simples, $FV = PV \cdot [(1 + (i\% \cdot n))]$, em especial o “n” como multiplicador.

Em cada momento, a soma da cota de capital (parcela de amortização) com os juros deve ser igual ao valor unitário da prestação.

$$PMT_1 = a_1 + J_1 = 1.242,23 + 434,78 = 1.677,02$$

$$PMT_2 = a_2 + J_2 = 1.304,35 + 372,67 = 1.677,02$$

$$PMT_3 = a_3 + J_3 = 1.366,46 + 310,56 = 1.677,02$$

$$PMT_4 = a_4 + J_4 = 1.428,57 + 248,45 = 1.677,02$$

$$PMT_5 = a_5 + J_5 = 1.490,69 + 186,34 = 1.677,02$$

$$PMT_6 = a_6 + J_6 = 1.522,79 + 124,22 = 1.677,02$$

$$PMT_7 = a_7 + J_7 = 1.614,91 + 62,11 = 1.677,02$$

O valor da prestação, no Método Linear, é obtido a partir do capital inicial já remunerado, ou seja, do montante ou valor futuro (FV).

A taxa sobre o saldo devedor, para a apropriação periódica e cálculo dos juros devidos em cada parcela, considera o IP, “Índice Ponderado” da soma dos prazos, ou seja, os juros pagos em cada parcela “rendem juros” da parcela “n” até 1. Ao invés de incidir sobre o saldo devedor, é multiplicado pelo tempo restante do prazo.

O Sistema de Juros Simples (critério da soma dos dígitos) consiste na divisão total dos juros ou dos encargos pelo somatório dos prazos (expressos por dígitos representativos do número de meses a decorrer), correspondente a cada prestação, sendo resultado dessa divisão multiplicado pelos respectivos prazos considerados na ordem inversa.

Como os juros são simples, é preciso somar o número total de parcelas, o que se faz com a fórmula:

$$\text{SNTP} = \frac{(n + 1) \cdot n}{2}$$

em que:

SNTP = somatório do número de parcelas,

n = prazo de utilização em unidade de tempo.

O índice de ponderação I.P. equivale ao resultado da divisão entre os encargos do financiamento pela soma dos prazos, ou seja, o dividendo entre a subtração do produto entre a prestação e o prazo e o valor presente pela soma dos prazos:

I.P. = encargos do financiamento / soma dos prazos

I.P. = [(prestação x prazo) – valor presente] / soma dos prazos

I.P. = [(PMT_{linear} x n) – PV] / soma dos n

Pode-se então calcular o IP com a seguinte fórmula:

$$IP = \frac{2 \cdot [(PMT_{js} \cdot n) - PV]}{(n + 1) \cdot n}$$

$$IP = \frac{(PMT_{js} \cdot n) - PV}{SNTP}$$

$$IP = \frac{(PMT_{js} \cdot n) - PV}{\frac{(n_1 + n_n) \cdot n}{2}}$$

$$IP = \frac{(PMT_{js} \cdot n) - PV}{\frac{(1 + n) \cdot n}{2}}$$

em que:

IP = índice de ponderação de juros,

PMT' = prestação,

n = prazo de utilização em unidade de tempo,

PV = capital tomado emprestado,

SNTP = somatório do número de parcelas.

$$PMT'_{js} = 1.677,02; i\% = 5\%; n = 7; PV = 10.000,00$$

$$IP = [(1.677,02 \times 7) - 10.000,00] / \{[(1 + 7) \times 7] / 2\}$$

$$IP = (11.739,14 - 10.000,00) / (8 \times 7 / 2) = 1.739,14 / (56 / 2)$$

$$IP = 1.739,14 / 28$$

$$IP = 62,11\ldots$$

Ou, conforme Figueiredo:

$$SNTP = \frac{n \cdot (n - 1)}{2}$$

$$SNTP = \frac{7 \times 8}{2} = \frac{56}{2}$$

$$SNTP = 28$$

$$IP = \frac{(PMT \times n) - PV}{SNTTP}$$

$$IP = \frac{[(1.677,02 \times 7) - 10.000,00]}{28} = \frac{[11.739,14 - 10.000,00]}{28} = \frac{1.739,14}{28}$$

$$IP = 62,11...$$

O índice de ponderação nada mais é do que a razão da PA obtida para a evolução, mês a mês, no caso de prestações fixas.

O cálculo do índice ponderado possibilita a apropriação dos juros mensais, assegurando, ao final do financiamento, o retorno integral do capital e dos juros simples, mediante o pagamento de parcelas mensais, iguais e consecutivas, cujo saldo final, após a quitação de todas as parcelas, será de zero.

A parcela de juros de um determinado período, ou devida em cada parcela, é obtida pela multiplicação do índice de ponderação (IP) e o prazo faltante para o pagamento da última prestação, na ordem inversa.

$$J = IP \cdot PR$$

em que:

J = valor dos juros,

IP = índice de ponderação de juros,

PR = número de parcelas restantes (inclusive a parcela atual).

Na prática, o prazo restante é dado por $(n - t + 1)$, onde n é o prazo total e t é o número da prestação.

O valor da cota de amortização, em cada unidade de tempo, é obtido através da subtração da parcela de juros na prestação.

$$A = PMT - J$$

em que:

A = valor da amortização,

PMT = valor da prestação (parcela) e

J = valor dos juros.

O valor do saldo devedor do financiamento em um determinado período, em cada unidade de tempo, dado pela subtração da parcela de amortização do período imediatamente anterior.

$$SD = SDA - A$$

em que:

SD = saldo devedor,

SDA = saldo devedor anterior,

J = valor dos juros,

A = valor da amortização.

A planilha contábil de evolução da dívida originada pelo Sistema Linear representa o seguinte procedimento padrão:

- (1) uma vez obtida a prestação:

$$PMT_{JS} = \frac{2 \cdot PV \cdot [(i\% \cdot n) + 1]}{[(i\% \cdot n) - i\% + 2] \cdot n}$$

- (2) e o índice ponderado:

$$IP = \frac{(PMT \cdot n) - PV}{SNTTP}$$

- (3) a parcela de juro embutido na parcela de um determinado período é obtida pela multiplicação do índice de ponderação e o prazo faltante para o pagamento da última prestação ($n - t + 1$; n = prazo total; t = número da prestação);

(4) subtrair, do valor da prestação a ser pago, a cota de juro, para se obter a cota de amortização;

(5) subtrair do saldo devedor do período anterior o valor da cota de amortização, para se obter o valor do saldo devedor no período atual.

Repete-se os passos 3, 4 e 5, até a data focal n .

Exemplo:

$$PMT_{js} = 1.677,02; i\% = 5\%; n = 7; PV = 10.000,00$$

$$PMT_{js} = \frac{[2 \times 10.000,00 \times (5\% \times 7 + 1)]}{\{[(5\% \times 7) - 5\% + 2] \times 7\}} = 1.677,02$$

$$IP = \frac{2 \times [(PMT_{js} \cdot n) - PV]}{(n + 1) \times n}$$

$$IP = \frac{\{2 \times [(1.677,02 \times 7) - 10.000,00]\}}{(7 + 1) \times 7}$$

$$IP = 62,11...$$

MOMENTO	JURO DO PERÍODO	VALOR FUTURO "FV"	PRES- TAÇÃO PERIÓ- DICA	PRT	JURO NA PRES- TAÇÃO	AMORTI- ZAÇÃO NA PRESTAÇÃO	SALDO DEVEDOR RESIDUAL	PRESTAÇÕES VINCENDAS				VALOR DA PRESTAÇÃO ATÉ O ÚLTIMO PERÍODO
7				I.P. =	62,11	10.000,00	Σ				Coefficiente	Σ
0		10.000,00		7			10.000,00	Prazo restante	Taxa	Σ	8,0500	13.500,00
1	500,00	10.500,00	1.677,02	6	434,78	1.242,24	8.757,76	7 - 1 = 6	x 5,00%	>	1,3000	2.180,12
2	500,00	11.000,00	1.677,02	5	372,67	1.304,35	7.453,42	7 - 2 = 5	x 5,00%	>	1,2500	2.096,27
3	500,00	11.500,00	1.677,02	4	310,56	1.366,46	6.086,96	7 - 3 = 4	x 5,00%	>	1,2000	2.012,42
4	500,00	12.000,00	1.677,02	3	248,45	1.428,57	4.658,39	7 - 4 = 3	x 5,00%	>	1,1500	1.928,57
5	500,00	12.500,00	1.677,02	2	186,34	1.490,68	3.167,70	7 - 5 = 2	x 5,00%	>	1,1000	1.844,72
6	500,00	13.000,00	1.677,02	1	124,22	1.552,80	1.614,91	7 - 6 = 1	x 5,00%	>	1,0500	1.760,87
7	500,00	13.500,00	1.677,02	0	62,11	1.614,91	0,00	7 - 7 = 0	x 5,00%	>	1,0000	1.677,02

Cabe observar que a soma dos juros e da amortização da prestação 1 com a prestação “n” é igual à soma dos juros e da amortização da prestação 2 com a prestação “n-1”, e assim sucessivamente (da 3.^a com a “n-2” ...), o que comprova a condição estabelecida pelo enunciado de juros simples ou lei da progressão aritmética, de que a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Repita-se que, no Método de Juros Simples, sob a ótica das progressões aritméticas, a taxa contratual de juros é aplicada, a cada unidade de tempo, sobre o capital inicial, de modo que o montante acumulado é significativamente menor do que o obtido com o Método de Juros Compostos, diferença na proporção direta do prazo do financiamento.

Os juros são calculados no momento da contratação, para então serem fracionados.

Em suma, no Sistema de Juros Simples, o valor da prestação periódica é obtido de modo inverso ao cálculo do Sistema de Juros Compostos, ou seja, a partir do capital já remunerado. A soma dos juros e do capital, ao final, é exatamente igual ao que seria pago se o capital emprestado devesse ser devolvido de uma só vez, ao final do prazo, juntamente com os juros.

No Sistema de Juros Simples, há uma limitação do custo, pois a prestação nunca pode ultrapassar o dobro da prestação ideal (PV / n), ou seja, o custo não pode ultrapassar os 100%, para qualquer valor de “i%” e “n”.

Por exemplo, se $PV = 10.000,00$, $i\% = 5\%$, $n = 7$, $PMT = 1.677,02$; $PV / n = 1.428,57$; 1,17.

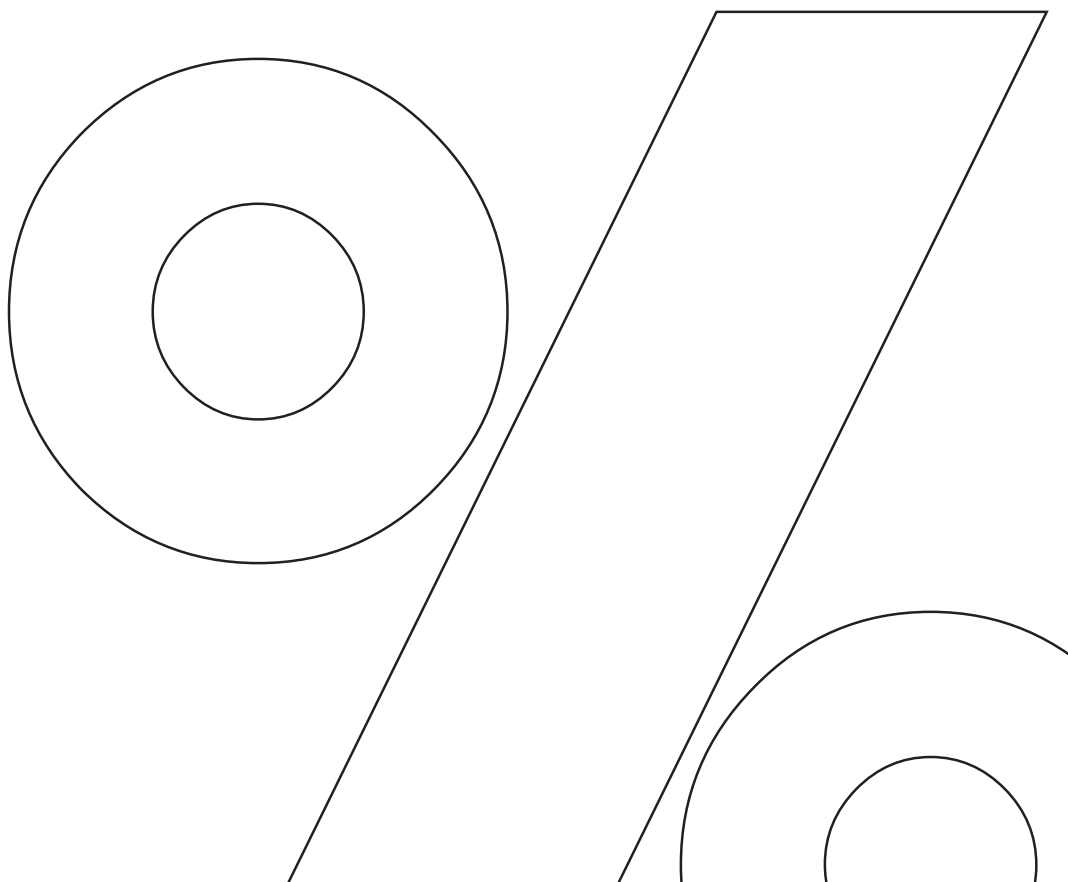
Para $n = 120$, $PMT = 146,75$, $PV / n = 83,33$; 1,76.

Na prática, mesmo em contratos de longa duração, o custo não ultrapassa os 60%; por exemplo, para $i = 1\%$ e $n = 240$, ele é de 55%).

Também se observa que aumentando o prazo n, é possível diminuir o valor da prestação, de tal modo que ela fique abaixo de qualquer valor desejado.

CAPÍTULO 18

PRESTAÇÃO PERIÓDICA E CAPITALIZAÇÃO DIÁRIA COMPOSTA



PRESTAÇÃO PERIÓDICA E CAPITALIZAÇÃO DIÁRIA COMPOSTA

Visando otimizar sua rentabilidade, os financiadores idealizaram um sistema de amortização, denominado **“série não periódica”**, que, ao invés da habitual periodicidade mensal, apropria juros diários (base: mês de 30 dias).

A juros compostos, o coeficiente de financiamento para que seja calculada a prestação é igual à soma do inverso da unidade mais a taxa exponenciada pelo número de períodos correspondentes a cada prestação.

Utilizando os dados padrão retro:

- capital inicial: R\$ 10.000,00

- taxa de juros do período: 5% ao mês

- número de períodos: 7 meses,

se o financiamento for contratado para ser pago em datas certas, por exemplo, em meses, a partir do dia 23/6/2019, cada período terá a seguinte duração:

- 1.º período: 30 dias (23/7/2019);
- 2.º período: 61 dias (23/8/2019);
- 3.º período: 92 dias (23/9/2019);
- 4.º período: 122 dias (23/10/2019);
- 5.º período: 153 dias (23/11/2019);
- 6.º período: 183 dias (23/12/2019);
- 7.º período: 214 dias (23/1/2020).

À taxa mensal de juros de 5,00% equivale um determinado valor de taxa diária.

O fator diário de atualização da taxa de juros compostos é:

$$FA_{\text{djC}} = (1 + 5\%)^{1/30} = (1,05)^{1/30}$$

$$FA_{\text{djC}} = 1,00162766.$$

Problema proposto: qual o valor fixo da prestação com vencimento em cada dia 23, a partir de 23/6/2019, que, ao final do prazo (23/1/2020), a juros compostos, amortiza o empréstimo e “zera” o saldo devedor?

O valor financiado de R\$ 10.000,00, ao final dos 214 dias (taxa mensal reduzida à taxa diária; mês de 30 dias), aplicado o fator equivalente à taxa mensal de juros, de forma exponencial, juro sobre juro mais capital, é de R\$ 14.162,84.

Em cada data de vencimento (dias 23), para ajustar o valor de cada prestação até o momento 214, o fator de atualização é igual ao índice diário elevado à potência do número de dias a decorrer entre o vencimento e a data final.

Da 1ª prestação até a 7ª prestação:

$$FA_{\text{dJC } (30 \rightarrow 214)} = (1,00162766)^{184} + (1,00162766)^{153} + (1,00162766)^{122} + (1,00162766)^{92} + (1,00162766)^{61} + (1,00162766)^{31} + (1,00162766)^0$$

$$FA_{\text{dJC } (30 \rightarrow 214)} = 1,3488 + 1,2825 + 1,2195 + 1,1614 + 1,1043 + 1,0517 + 1,0000$$

O somatório dos fatores de atualização de cada data de vencimento é igual a:

$$FA_{\text{dJC } (30 \rightarrow 214)} = 8,1682.$$

O valor da prestação em cada data de vencimento é de R\$ 1.733,89, resultante da divisão entre o valor futuro, R\$ 14.162,84, e o somatório dos fatores de atualização, $FA_{\text{dJC } (0 \rightarrow 214)} = 8,1682$.

$$PMT_{\text{dJC}} = FV_{\text{dJC } (0 \rightarrow 214)} / FA_{\text{dJC } (30 \rightarrow 214)}$$

$$PMT_{\text{dJC}} = \frac{14.162,84}{8,1682}$$

$$PMT_{\text{dJC}} = 1.733,89$$

Num	Data	Num dias	Dias acum	Fator diário	Dias até "n"	Coefficiente	Σ PMT NO INSTANTE N (exp)
		214				Σ 8,168232024	14.162,84
0	23/06/2019						
1	23/07/2019	30	30	(1 + 0,001627662) ^ 184 =	1,348841857		2.338,75
2	23/08/2019	31	61	(1 + 0,001627662) ^ 153 =	1,282523777		2.223,76
3	23/09/2019	31	92	(1 + 0,001627662) ^ 122 =	1,219466337		2.114,42
4	23/10/2019	30	122	(1 + 0,001627662) ^ 92 =	1,161396511		2.013,74
5	23/11/2019	31	153	(1 + 0,001627662) ^ 61 =	1,104294497		1.914,73
6	23/12/2019	30	183	(1 + 0,001627662) ^ 31 =	1,051709045		1.823,55
7	23/01/2020	31	214	(1 + 0,001627662) ^ - =	1,000000000		1.733,89

Por equivalência de fluxos de caixa, ao final do período 1 (30 dias, entre 23/6/2019 e 23/7/2019), o saldo devedor equivale à diferença entre o valor do capital inicial atualizado por 30 dias e o valor da primeira prestação:

$$SD_{dJC1} = 10.000,00 \times [(1+0,1628\%)^{30}] - 1.733,89 \times [(1+0,1628\%)^0]$$

$$SD_{dJC1} = 10.500,00 - 1.733,89$$

$$SD_{dJC1} = 8.766,11$$

Ao final do período 2 (61 dias, entre 23/6/2019 e 23/8/2019), o saldo devedor equivale ao valor do capital inicial atualizado por 61 dias menos o somatório entre o valor da primeira prestação atualizado por 31 dias e o valor da segunda prestação:

$$SD_{dJC2} = 10.000,00 \times [(1+0,1628\%)^{61}] - 1.733,89 \times [(1+0,1628\%)^{31}] - 1.733,89 \times [(1+0,1628\%)^0]$$

$$SD_{dJC2} = 11.042,94 - 1.823,55 - 1.733,89$$

$$SD_{dJC2} = 7.485,50$$

Ao final do período 3 (92 dias, entre 23/6/2019 e 23/9/2019), o saldo devedor equivale ao valor do capital inicial atualizado por 92 dias menos o somatório entre o valor da primeira prestação atualizado por 62 dias, o valor da segunda prestação atualizado por 31 dias e o valor da terceira prestação:

$$SD_{dJC3} = 11.613,97 - 1.917,84 - 1.823,55 - 1.733,89$$

$$SD_{dJC3} = 6.138,68$$

Ao final do período 4 (122 dias, entre 23/6/2019 e 23/10/2019), o saldo devedor equivale ao valor do capital inicial atualizado por 122 dias menos o somatório entre o valor da primeira prestação atualizado por 92 dias, o valor da segunda prestação atualizado por 61 dias, o valor da terceira prestação atualizado por 30 dias e o valor da quarta prestação:

$$SD_{dJC4} = 12.194,66 - 2.013,73 - 1.914,73 - 1.820,58 - 1.733,89$$

$$SD_{dJC4} = 4.711,72$$

Ao final do período 5 (153 dias, entre 23/6/2019 e 23/11/2019), o saldo devedor equivale ao valor do capital inicial atualizado por 153 dias menos o somatório entre o valor da primeira prestação atualizado por 123 dias, o valor da segunda prestação atualizado por 92 dias, o valor da terceira prestação atualizado por 61 dias, o valor da quarta prestação por 31 dias e o valor da quinta prestação:

$$SD_{dJC5} = 12.825,24 - 2.117,86 - 2.013,73 - 1.914,73 - 1.823,55 - 1.733,89$$

$$SD_{dJC5} = 3.221,46$$

Ao final do período 6 (183 dias, entre 23/6/2019 e 23/12/2019), o saldo devedor equivale ao valor do capital inicial atualizado por 183 dias menos o somatório entre o valor da primeira prestação atualizado por 153 dias, o valor da segunda prestação atualizado por 122 dias, o valor da terceira prestação atualizado por 91 dias, o valor da quarta prestação por 61 dias, o valor da quinta prestação por 30 dias e o valor da sexta prestação:

$$SD_{dJC6} = 13.466,50 - 2.223,76 - 2.114,62 - 2.010,46 - 1.914,73 - 1.820,58 - 1.733,89$$

$$SD_{dJC6} = 1.648,64$$

Ao final do período 7 (214 dias, entre 23/6/2019 e 23/1/2020), o saldo devedor equivale ao valor do capital inicial atualizado por 214 dias menos o somatório entre o valor da primeira prestação atualizado por 184 dias, o valor da segunda prestação atualizado por 153 dias, o valor da terceira prestação atualizado por 122 dias, o valor da quarta prestação por 92 dias, o valor da quinta prestação por 61 dias, o valor da sexta prestação por 31 dias e o valor da sétima prestação:

$$SD_{dJC7} = 14.162,84 - 2.338,74 - 2.223,76 - 2.114,42 - 2.013,73 - 1.914,73 - 1.823,55 - 1.733,89$$

$$SD_{dJC7} = 0,00$$

Num parc	0	1	2	3	4	5	6	7
Data	23/06/2019	23/07/2019	23/08/2019	23/09/2019	23/10/2019	23/11/2019	23/12/2019	23/01/2020
Num dias		30	31	31	30	31	30	31
Dias acum		30	61	92	122	153	183	214
Dias até fim prz		184	153	122	92	61	31	0
Princ atualiz	10.000,00	10.500,00	11.042,94	11.613,97	12.194,66	12.825,24	13.466,50	14.162,84
Variação 0		1.733,89	1.733,89	1.733,89	1.733,89	1.733,89	1.733,89	1.733,89
Variação 1			1.823,55	1.823,55	1.820,59	1.823,55	1.820,59	1.823,55
Variação 2				1.917,84	1.914,73	1.914,73	1.914,73	1.914,73
Variação 3					2.013,74	2.010,46	2.010,46	2.013,74
Variação 4						2.117,87	2.114,42	2.114,42
Variação 5							2.223,76	2.223,76
Variação 6								2.338,75
Saldo devedor	10.000,00	8.766,11	7.485,50	6.138,68	4.711,72	3.221,46	1.648,64	-

A cota de amortização contida em cada prestação resulta da diferença entre os saldos devedores, assim como a diferença entre a prestação e cota de amortização resulta na cota de juros.

$$SD_{djC0} - SD_{djC1} = 1.233,89 = A_{djC1} \quad J_{djC1} = PMT'_{djC} - A_{djC1} = 500,00$$

$$SD_{djC1} - SD_{djC2} = 1.280,61 = A_{djC2} \quad J_{djC2} = PMT'_{djC} - A_{djC2} = 453,29$$

$$SD_{djC2} - SD_{djC3} = 1.346,82 = A_{djC3} \quad J_{djC3} = PMT'_{djC} - A_{djC3} = 387,07$$

$$SD_{djC3} - SD_{djC4} = 1.426,96 = A_{djC4} \quad J_{djC4} = PMT'_{djC} - A_{djC4} = 306,93$$

$$SD_{djC4} - SD_{djC5} = 1.490,25 = A_{djC5} \quad J_{djC5} = PMT'_{djC} - A_{djC5} = 243,64$$

$$SD_{djC5} - SD_{djC6} = 1.572,82 = A_{djC6} \quad J_{djC6} = PMT'_{djC} - A_{djC6} = 161,07$$

$$SD_{djC6} - SD_{djC7} = 1.648,64 = A_{djC7} \quad J_{djC7} = PMT'_{djC} - A_{djC7} = 85,25$$

Num parcela	0	1	2	3	4	5	6	7
Valor da prestação		1.733,89	1.733,89	1.733,89	1.733,89	1.733,89	1.733,89	1.733,89
Cota de amortização		1.233,89	1.280,61	1.346,82	1.426,96	1.490,25	1.572,82	1.648,64
Cota de juros		500,00	453,29	387,07	306,93	243,64	161,07	85,25

Em suma, para os cálculos de financiamentos a juros compostos com capitalização diária, a partir da obtenção do valor da prestação, com base no valor futuro de “0” a “n” e no somatório dos fatores de atualização, do primeiro período em diante até “n”,

$$\text{PMT}_{\text{dJC}} = \text{FV}_{\text{dJC } (0 \rightarrow n)} / \text{FA}_{\text{dJC } (1 \rightarrow n)}$$

são apuradas as cotas de juros de cada período, a partir das cotas de amortização, que, por sua vez, são calculadas com base na diferença dos saldos devedores consecutivos, cada um deles obtido pela subtração entre o valor presente atualizado até o período em análise e o somatório das prestações vencidas, desde a primeira até a referente ao período em cotejo, devidamente atualizadas.

$$\text{SD}_{\text{dJC1}} = \text{PV}_{\text{dJC } (0 \rightarrow 1)} - \sum \text{PMT}_{\text{dJC } (1 \rightarrow 1)}$$

$$\text{SD}_{\text{dJC2}} = \text{PV}_{\text{dJC } (0 \rightarrow 2)} - \sum \text{PMT}_{\text{dJC } (1 \rightarrow 2)}$$

...

$$\text{SD}_{\text{dJC } (n-1)} = \text{PV}_{\text{dJC } (0 \rightarrow n-1)} - \sum \text{PMT}_{\text{dJC } (1 \rightarrow n-1)}$$

$$\text{SD}_{\text{dJC } (n)} = \text{PV}_{\text{dJC } (0 \rightarrow n)} - \sum \text{PMT}_{\text{dJC } (1 \rightarrow n)}$$

$$\text{SD}_{\text{dJC0}} - \text{SD}_{\text{dJC1}} = \text{A}_{\text{dJC1}}$$

$$\text{J}_{\text{dJC1}} = \text{PMT}_{\text{dJC}} - \text{A}_{\text{dJC1}}$$

$$\text{SD}_{\text{dJC1}} - \text{SD}_{\text{dJC2}} = \text{A}_{\text{dJC2}}$$

$$\text{J}_{\text{dJC2}} = \text{PMT}_{\text{dJC}} - \text{A}_{\text{dJC2}}$$

...

$$\text{SD}_{\text{dJC } (n-2)} - \text{SD}_{\text{dJC } (n-1)} = \text{A}_{\text{dJC } (n-1)}$$

$$\text{J}_{\text{dJC } (n-1)} = \text{PMT}_{\text{dJC}} - \text{A}_{\text{dJC } (n-1)}$$

$$\text{SD}_{\text{dJC } (n-1)} - \text{SD}_{\text{dJC } (n)} = \text{A}_{\text{dJC } (n)}$$

$$\text{J}_{\text{dJC } (n)} = \text{PMT}_{\text{dJC}} - \text{A}_{\text{dJC } (n)}$$

Algoritmo para cálculo de financiamento a juros compostos com capitalização diária.

(1) Calcula-se o valor da prestação, a partir do valor futuro, com base no somatório dos fatores de atualização.

$$\text{PMT}_{\text{dJC}} = \text{FV}_{\text{dJC } (0 \rightarrow n)} / \text{FA}_{\text{dJC } (1 \rightarrow n)}$$

(2) A partir do 1.º, calcula-se o juro do período, mediante aplicação da seguinte expressão sobre o saldo devedor anterior:

$$\text{J}_{\text{dJC1}} = \text{SD}_{\text{dJC0}} \times \{[(1 + i_{\text{dJC}} \%) ^{nd_{(0 \rightarrow 1)}}] - 1\}$$

(3) Do valor da prestação subtrai-se o valor da cota dos juros, encontrando o valor da parcela do principal contida na prestação, equivalente à parte amortizada do capital ou valor presente.

$$\text{PMT}_{\text{dJC}} - \text{J}_{\text{dJC1}} = \text{A}_{\text{dJC1}}$$

(4) Do valor do saldo devedor anterior deduz-se a cota de amortização, resultando no novo saldo devedor residual.

$$SD_{djC0} - A_{djC1} = SD_{djC1}$$

Para os períodos seguintes, repete-se os procedimentos dos passos 2, 3 e 4, considerando que, no passo 2, a fórmula dos juros obedece à seguinte evolução.

$$J_{djC2} = SD_{djC1} \times \{[(1 + i_{djC} \%) ^{nd_{(1 \rightarrow 2)}}] - 1\}$$

$$J_{djC3} = SD_{djC2} \times \{[(1 + i_{djC} \%) ^{nd_{(2 \rightarrow 3)}}] - 1\}$$

$$J_{djC4} = SD_{djC3} \times \{[(1 + i_{djC} \%) ^{nd_{(3 \rightarrow 4)}}] - 1\}$$

$$J_{djC5} = SD_{djC4} \times \{[(1 + i_{djC} \%) ^{nd_{(4 \rightarrow 5)}}] - 1\}$$

...

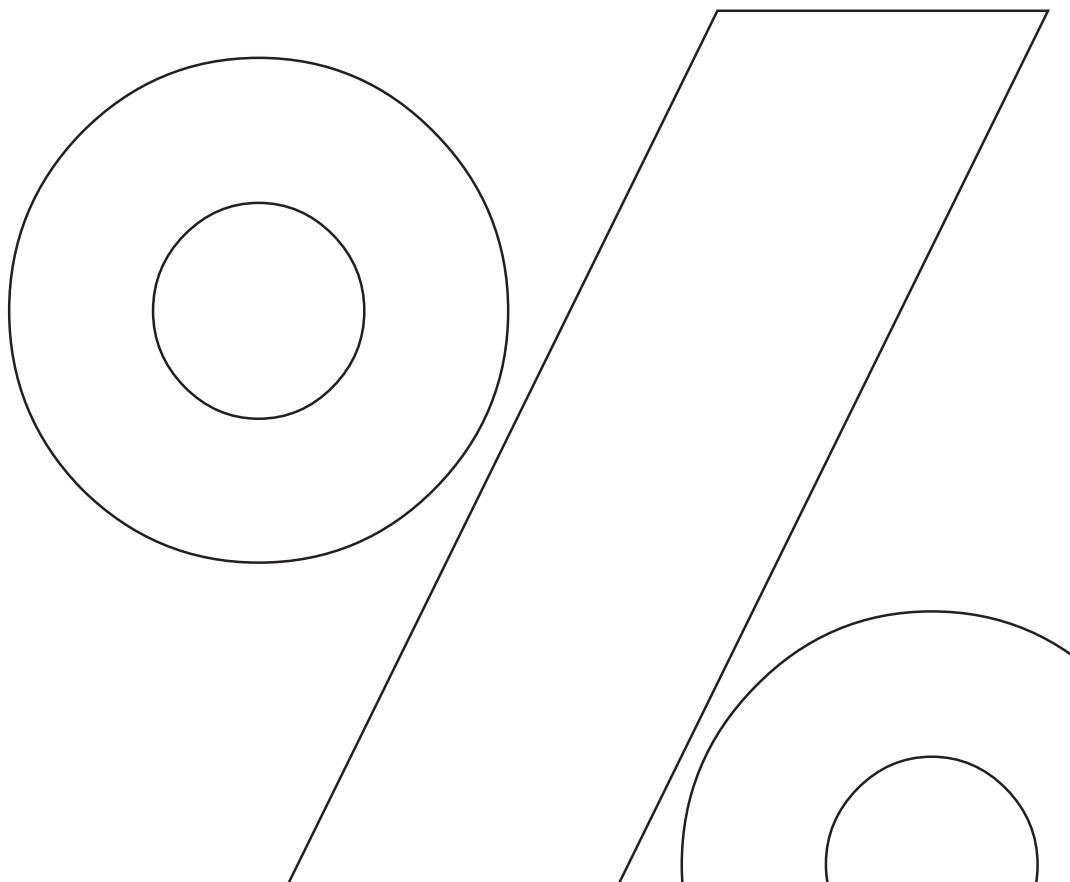
$$J_{djC(n-1)} = SD_{djC(n-2)} \times \{[(1 + i_{djC} \%) ^{nd_{(n-2 \rightarrow n-1)}}] - 1\}$$

$$J_{djC(n)} = SD_{djC(n-1)} \times \{[(1 + i_{djC} \%) ^{nd_{(n-1 \rightarrow n)}}] - 1\}$$

Num	Data	Valor da prestação	Fator de juros	Valor dos juros	Valor da amortização	Saldo devedor	Fator de acumulação de capital	Saldo devedor acumulado
0	23/06/2019					10.000,00	1,000000	10.000,00
1	23/07/2019	1.733,89	0,050000	500,00	1.233,89	8.766,11	1,050000	10.500,00
2	23/08/2019	1.733,89	0,051709	453,29	1.280,61	7.485,50	1,104294	11.042,94
3	23/09/2019	1.733,89	0,051709	387,07	1.346,82	6.138,68	1,161397	11.613,97
4	23/10/2019	1.733,89	0,050000	306,93	1.426,96	4.711,72	1,219466	12.194,66
5	23/11/2019	1.733,89	0,051709	243,64	1.490,25	3.221,46	1,282524	12.825,24
6	23/12/2019	1.733,89	0,050000	161,07	1.572,82	1.648,64	1,346650	13.466,50
7	23/01/2020	1.733,89	0,051709	85,25	1.648,64	- 0,00	1,416284	14.162,84

CAPÍTULO 19

PRESTAÇÃO PERIÓDICA E CAPITALIZAÇÃO DIÁRIA SIMPLES



PRESTAÇÃO PERIÓDICA E CAPITALIZAÇÃO DIÁRIA SIMPLES

A juros simples, “série não periódica”, capitalização diária, o coeficiente de financiamento para que seja calculada a prestação é igual à soma do inverso da unidade mais a taxa multiplicada pelo número de períodos correspondentes a cada prestação (base: mês de 30 dias).

Utilizando os dados padrão retro:

- capital inicial: R\$ 10.000,00
- taxa de juros do período: 5% ao mês
- número de períodos: 7 meses,

se o financiamento for contratado para ser pago em datas certas, por exemplo, em meses, a partir do dia 23/6/2019, cada período terá a seguinte duração:

- 1.º período: 30 dias (23/7/2019);
- 2.º período: 61 dias (23/8/2019);
- 3.º período: 92 dias (23/9/2019);
- 4.º período: 122 dias (23/10/2019);
- 5.º período: 153 dias (23/11/2019);
- 6.º período: 183 dias (23/12/2019);
- 7.º período: 214 dias (23/1/2020).

À taxa mensal de juros de 5,00% equivale um determinado valor de taxa diária.

O fator diário de atualização da taxa de juros simples é:

$$FA_{\text{djs}} = (5\% / 30)$$

$$FA_{\text{djs}} = 0,016666667$$

Problema proposto: qual o valor fixo da prestação com vencimento em cada dia 23, a partir de 23/6/2019, que, ao final do prazo (23/1/2020), a juros simples, amortiza o empréstimo e “zera” o saldo devedor?

O valor financiado de R\$ 10.000,00, ao final dos 214 dias (taxa mensal reduzida à taxa diária; mês de 30 dias), aplicado o fator equivalente à taxa mensal de juros, de forma linear, juro sobre juro mais capital, é de R\$ 13.566,67.

Em cada data de vencimento (dias 23), para ajustar o valor de cada prestação até o momento 214, o coeficiente de atualização é igual ao índice diário multiplicado pelo número de dias a decorrer entre o vencimento e a data final.

Da 1ª prestação até a 7ª prestação:

$$FA_{\text{djs } (0 \rightarrow 214)} = [1 + (0,00166667 \times 184)] + [1 + (0,00166667 \times 153)] + [1 + (0,00166667 \times 122)] + [1 + (0,00166667 \times 92)] + [1 + (0,00166667 \times 61)] + [1 + (0,00166667 \times 31)] + [1 + (0,00166667 \times 0)]$$

$$FA_{\text{djs } (0 \rightarrow 214)} = 1,3067 + 1,2550 + 1,2033 + 1,1533 + 1,1017 + 1,5167 + 1,0000$$

O somatório dos coeficientes de atualização de cada data de vencimento é igual a:

$$FA_{\text{djs } (0 \rightarrow 214)} = 8,0717.$$

O valor da prestação em cada data de vencimento é de R\$ 1.680,78, resultante da divisão entre o valor futuro, R\$ 13.566,67, e o fator de financiamento, $FA_{\text{djs } (0 \rightarrow 214)} = 8,0717$.

$$PMT_{\text{djs}} = FV_{\text{djs } (0 \rightarrow 214)} / FA_{\text{djs } (30 \rightarrow 214)}$$

$$PMT_{\text{djs}} = 13.566,67 / 8,0717$$

$$PMT_{\text{djs}} = 1.680,78.$$

Num	Data	Num dias	Dias acum	Fator diário	Dias até "n"			Coeficiente	Σ PMT NO INSTANTE N (lin)
				Σ 8,071666667					13.566,67
0	23/06/2019								
1	23/07/2019	30	30	1 + (0,00166667 x 184) = 1,306666667					2.196,21
2	23/08/2019	31	61	1 + (0,00166667 x 153) = 1,255000000					2.109,37
3	23/09/2019	31	92	1 + (0,00166667 x 122) = 1,203333333					2.022,53
4	23/10/2019	30	122	1 + (0,00166667 x 92) = 1,153333333					1.938,50
5	23/11/2019	31	153	1 + (0,00166667 x 61) = 1,101666667					1.851,66
6	23/12/2019	30	183	1 + (0,00166667 x 31) = 1,051666667					1.767,62
7	23/01/2020	31	214	1 + (0,00166667 x -) = 1,000000000					1.680,78

Por equivalência de fluxos de caixa, ao final do período 1 (30 dias, entre 23/6/2019 e 23/7/2019), o saldo devedor equivale à diferença entre o valor do capital inicial atualizado por 30 dias e o valor da primeira prestação:

$$SD_{djs1} = 10.000,00 \times [1 + (0,1667\% \times 30)] - 1.680,78 \times [1 + (0,1667\% \times 0)] = 10.500,00 - 1.680,78$$

$$SD_{djs1} = 8.819,22$$

Ao final do período 2 (61 dias, entre 23/6/2019 e 23/8/2019), o saldo devedor equivale ao valor do capital inicial atualizado por 61 dias menos o somatório entre o valor da primeira prestação atualizado por 31 dias e o valor da segunda prestação:

$$SD_{djs2} = 10.000,00 \times [1 + (0,1667\% \times 61)] - 1.677,02 \times [1 + (0,1667\% \times 31)] - 1.677,02 \times [1 + (0,1667\% \times 0)]$$

$$SD_{djs2} = 11.016,67 - 1.767,62 - 1.680,78$$

$$SD_{djs2} = 7.568,27$$

Ao final do período 3 (92 dias, entre 23/6/2019 e 23/9/2019), o saldo devedor equivale ao valor do capital inicial atualizado por 92 dias menos o somatório entre o valor da primeira prestação atualizado por 62 dias, o valor da segunda prestação atualizado por 31 dias e o valor da terceira prestação:

$$SD_{djs3} = 11.533,33 - 1.854,46 - 1.767,62 - 1.680,78$$

$$SD_{djs3} = 6.230,48$$

Ao final do período 4 (122 dias, entre 23/6/2019 e 23/10/2019), o saldo devedor equivale ao valor do capital inicial atualizado por 122 dias menos o somatório entre o valor da primeira prestação atualizado por 92 dias, o valor da segunda prestação atualizado por 61 dias, o valor da terceira prestação atualizado por 30 dias e o valor da quarta prestação:

$$SD_{djs4} = 12.033,33 - 1.938,50 - 1.851,66 - 1.764,82 - 1.680,78$$

$$SD_{djs4} = 4.797,59$$

Ao final do período 5 (153 dias, entre 23/6/2019 e 23/11/2019), o saldo devedor equivale ao valor do capital inicial atualizado por 153 dias menos o somatório entre o valor da primeira prestação atualizado por 123 dias, o valor da segunda prestação atualizado por 92 dias, o valor da terceira prestação atualizado por 61 dias, o valor da quarta prestação por 31 dias e o valor da quinta prestação:

$$SD_{djs5} = 12.550,00 - 2.025,34 - 1.938,50 - 1.851,66 - 1.767,62 - 1.680,78$$

$$SD_{djs5} = 3.286,12$$

Ao final do período 6 (183 dias, entre 23/6/2019 e 23/12/2019), o saldo devedor equivale ao valor do capital inicial atualizado por 183 dias menos o somatório entre o valor da primeira prestação atualizado por 153 dias, o valor da segunda prestação atualizado por 122 dias, o valor da terceira prestação atualizado por 91 dias, o valor da quarta prestação por 61 dias, o valor da quinta prestação por 30 dias e o valor da sexta prestação:

$$SD_{djs6} = 13.050,00 - 2.109,37 - 2.022,53 - 1.935,69 - 1.851,66 - 1.764,82 - 1.680,78$$

$$SD_{djs6} = 1.685,15$$

Ao final do período 7 (214 dias, entre 23/6/2019 e 23/1/2020), o saldo devedor equivale ao valor do capital inicial atualizado por 214 dias menos o somatório entre o valor da primeira prestação atualizado por 184 dias, o valor da segunda prestação atualizado por 153 dias, o valor da terceira prestação atualizado por 122 dias, o valor da quarta prestação por 92 dias, o valor da quinta prestação por 61 dias, o valor da sexta prestação por 31 dias e o valor da sétima prestação:

$$SD_{\text{djs7}} = 13.566,67 - 2.196,21 - 2.109,37 - 2.022,53 - 1.938,50 - 1.851,66 - 1.767,62 - 1.680,78$$

$$SD_{\text{djs7}} = 0,00$$

Num parc	0	1	2	3	4	5	6	7
Data	23/06/2019	23/07/2019	23/08/2019	23/09/2019	23/10/2019	23/11/2019	23/12/2019	23/01/2020
Num dias		30	31	31	30	31	30	31
Dias acum		30	61	92	122	153	183	214
Dias até fim prz		184	153	122	92	61	31	0
Princ atualiz	10.000,00	10.500,00	11.016,67	11.533,33	12.033,33	12.550,00	13.050,00	13.566,67
Variação 0		1.680,78	1.680,78	1.680,78	1.680,78	1.680,78	1.680,78	1.680,78
Variação 1			1.767,62	1.767,62	1.764,82	1.767,62	1.764,82	1.767,62
Variação 2				1.854,46	1.851,66	1.851,66	1.851,66	1.851,66
Variação 3					1.938,50	1.938,50	1.935,69	1.938,50
Variação 4						2.025,34	2.022,53	2.022,53
Variação 5							2.109,37	2.109,37
Variação 6								2.196,21
Saldo devedor	10.000,00	8.819,22	7.568,27	6.230,48	4.797,59	3.286,12	1.685,15	0,00

A cota de amortização contida em cada prestação resulta da diferença entre os saldos devedores, assim como a diferença entre a prestação e cota de amortização resulta na cota de juros.

$$SD_{\text{djs0}} - SD_{\text{djs1}} = 1.180,78 = A_{\text{djs1}} \quad J_{\text{djs1}} = PMT'_{\text{djs}} - A_{\text{djs1}} = 500,00$$

$$SD_{\text{djs1}} - SD_{\text{djs2}} = 1.250,95 = A_{\text{djs2}} \quad J_{\text{djs2}} = PMT'_{\text{djs}} - A_{\text{djs2}} = 429,83$$

$$SD_{\text{djs2}} - SD_{\text{djs3}} = 1.337,79 = A_{\text{djs3}} \quad J_{\text{djs3}} = PMT'_{\text{djs}} - A_{\text{djs3}} = 342,99$$

$$SD_{\text{djs3}} - SD_{\text{djs4}} = 1.432,89 = A_{\text{djs4}} \quad J_{\text{djs4}} = PMT'_{\text{djs}} - A_{\text{djs4}} = 247,88$$

$$SD_{\text{djs4}} - SD_{\text{djs5}} = 1.511,47 = A_{\text{djs5}} \quad J_{\text{djs5}} = PMT'_{\text{djs}} - A_{\text{djs5}} = 169,31$$

$$SD_{\text{djs5}} - SD_{\text{djs6}} = 1.600,97 = A_{\text{djs6}} \quad J_{\text{djs6}} = PMT'_{\text{djs}} - A_{\text{djs6}} = 79,81$$

$$SD_{\text{djs6}} - SD_{\text{djs7}} = 1.685,15 = A_{\text{djs7}} \quad J_{\text{djs7}} = PMT'_{\text{djs}} - A_{\text{djs7}} = -4,37$$

Num parcela	0	1	2	3	4	5	6	7
Prestação		1.680,78	1.680,78	1.680,78	1.680,78	1.680,78	1.680,78	1.680,78
Amortização		1.180,78	1.250,95	1.337,79	1.432,89	1.511,47	1.600,97	1.685,15
Juros		500,00	429,83	342,99	247,88	169,31	79,81	- 4,37

Em suma, para os cálculos de financiamentos a juros simples com capitalização diária, a partir da obtenção do valor da prestação, com base no valor futuro de “0” a “n” e no somatório dos fatores de atualização, do primeiro período em diante até “n”,

$$\text{PMT}_{\text{dJS}} = \text{FV}_{\text{dJS } (0 \rightarrow n)} / \text{FA}_{\text{dJS } (1 \rightarrow n)}$$

são apuradas as cotas de juros de cada período, a partir das cotas de amortização, que, por sua vez, são calculadas com base na diferença dos saldos devedores consecutivos, cada um deles obtido pela subtração entre o valor presente atualizado até o período em análise e o somatório das prestações vencidas, desde a primeira até a referente ao período em cotejo, devidamente atualizadas.

$$\text{SD}_{\text{dJS1}} = \text{PV}_{\text{dJS } (0 \rightarrow 1)} - \sum \text{PMT}_{\text{dJS } (1 \rightarrow 1)}$$

$$\text{SD}_{\text{dJS2}} = \text{PV}_{\text{dJS } (0 \rightarrow 2)} - \sum \text{PMT}_{\text{dJS } (1 \rightarrow 2)}$$

...

$$\text{SD}_{\text{dJS } (n-1)} = \text{PV}_{\text{dJS } (0 \rightarrow n-1)} - \sum \text{PMT}_{\text{dJS } (1 \rightarrow n-1)}$$

$$\text{SD}_{\text{dJS } (n)} = \text{PV}_{\text{dJS } (0 \rightarrow n)} - \sum \text{PMT}_{\text{dJS } (1 \rightarrow n)}$$

$$\text{SD}_{\text{dJS0}} - \text{SD}_{\text{dJS1}} = \text{A}_{\text{dJS1}}$$

$$\text{J}_{\text{dJS1}} = \text{PMT}_{\text{dJS}} - \text{A}_{\text{dJS1}}$$

$$\text{SD}_{\text{dJS1}} - \text{SD}_{\text{dJS2}} = \text{A}_{\text{dJS2}}$$

$$\text{J}_{\text{dJS2}} = \text{PMT}_{\text{dJS}} - \text{A}_{\text{dJS2}}$$

...

$$\text{SD}_{\text{dJS } (n-2)} - \text{SD}_{\text{dJS } (n-1)} = \text{A}_{\text{dJS } (n-1)}$$

$$\text{J}_{\text{dJS } (n-1)} = \text{PMT}_{\text{dJS}} - \text{A}_{\text{dJS } (n-1)}$$

$$\text{SD}_{\text{dJS } (n-1)} - \text{SD}_{\text{dJS } (n)} = \text{A}_{\text{dJS } (n)}$$

$$\text{J}_{\text{dJS } (n)} = \text{PMT}_{\text{dJS}} - \text{A}_{\text{dJS } (n)}$$

Algoritmo para cálculo de financiamento a juros simples com capitalização diária

(1) Calcula-se o valor da prestação, a partir do valor futuro, com base no somatório dos fatores de atualização.

$$\text{PMT}_{\text{dJS}} = \text{FV}_{\text{dJS } (0 \rightarrow n)} / \text{FA}_{\text{dJS } (1 \rightarrow n)}$$

(2) A partir do 1.º período, calcula-se o juro respectivo, mediante aplicação da seguinte expressão sobre o saldo devedor anterior:

$$\text{J}_{\text{dJS } (n)} = [\text{SD}_{n-1} - (\text{soma juros atualizados até } n-1)] \cdot i\% \cdot (\text{dias entre datas})$$

$$\text{J}_{\text{dJS1}} = [\text{SD}_{\text{dJS0}} - \sum \text{J}_{\text{dJS } (0 \rightarrow 0)}] \cdot i_{\text{dJS}}\% \cdot \text{nd}_{(0 \rightarrow 1)}$$

(3) Do valor da prestação subtrai-se o valor da cota dos juros, encontrando o valor da parcela do principal contida na prestação, equivalente à parte amortizada do capital ou valor presente.

$$\text{PMT}_{\text{dJS}} - \text{J}_{\text{dJS1}} = \text{A}_{\text{dJS1}}$$

(4) Do valor do saldo devedor anterior deduz-se a cota de amortização, resultando no novo saldo devedor residual.

$$\text{SD}_{\text{dJS0}} - \text{A}_{\text{dJS1}} = \text{SD}_{\text{dJS1}}$$

Para os períodos seguintes, repete-se os procedimentos dos passos 2, 3 e 4, considerando que, no passo 2, a fórmula dos juros obedece à seguinte evolução

$$\text{J}_{\text{dJS2}} = [\text{SD}_{\text{dJS1}} - \sum \text{J}_{\text{dJS } (0 \rightarrow 1)}] \cdot i_{\text{dJS}}\% \cdot \text{nd}_{(1 \rightarrow 2)}$$

$$\text{J}_{\text{dJS3}} = [\text{SD}_{\text{dJS2}} - \sum \text{J}_{\text{dJS } (0 \rightarrow 2)}] \cdot i_{\text{dJS}}\% \cdot \text{nd}_{(2 \rightarrow 3)}$$

$$\text{J}_{\text{dJS4}} = [\text{SD}_{\text{dJS3}} - \sum \text{J}_{\text{dJS } (0 \rightarrow 3)}] \cdot i_{\text{dJS}}\% \cdot \text{nd}_{(3 \rightarrow 4)}$$

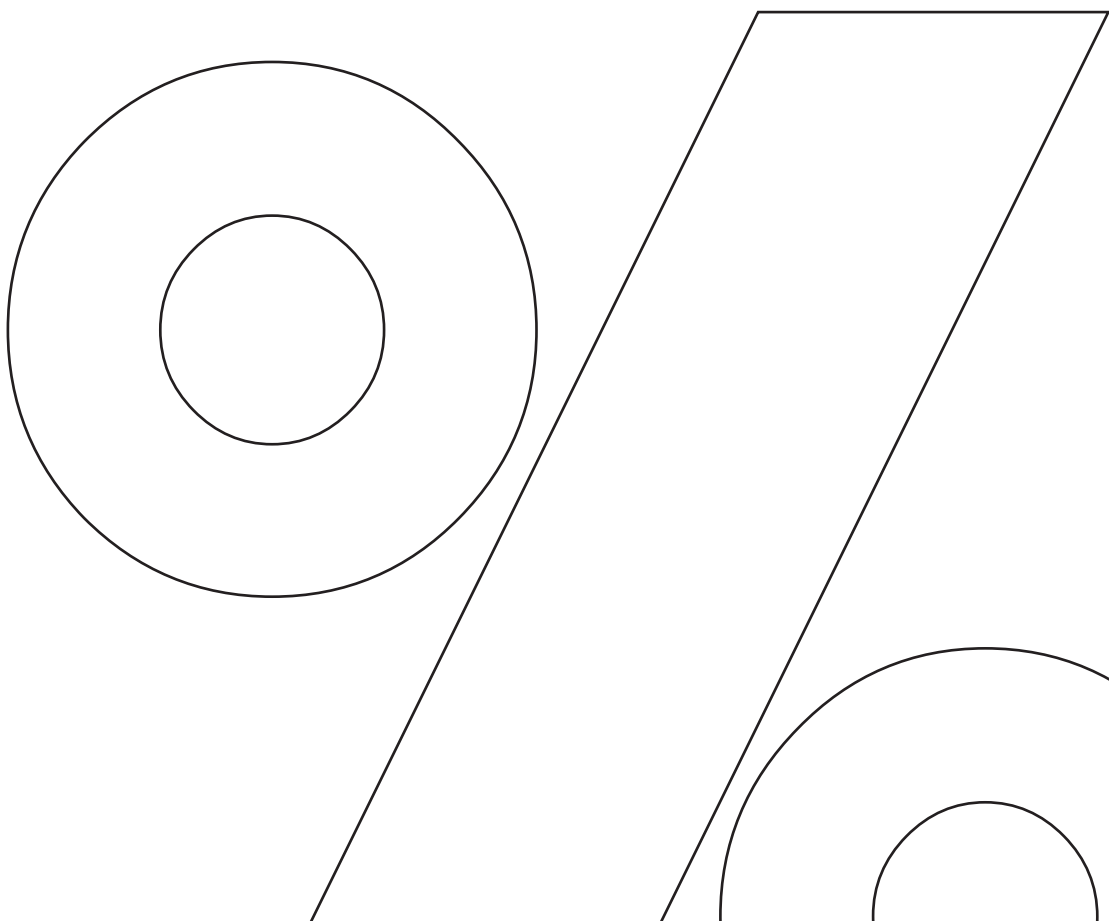
$$\text{J}_{\text{dJS5}} = [\text{SD}_{\text{dJS4}} - \sum \text{J}_{\text{dJS } (0 \rightarrow 4)}] \cdot i_{\text{dJS}}\% \cdot \text{nd}_{(4 \rightarrow 5)}$$

...

Num	Data venc	Valor da prestação	Fator de juros	Valor dos juros	Valor da amortização	Saldo devedor	Fator de acumulação de capital	Saldo devedor acumulado
0	23/06/2019					10.000,00	1,000000	10.000,00
1	23/07/2019	1.680,78	0,050000	500,00	1.180,78	8.819,22	1,050000	10.500,00
2	23/08/2019	1.680,78	0,051667	429,83	1.250,95	7.568,27	1,101667	11.016,67
3	23/09/2019	1.680,78	0,051667	342,99	1.337,79	6.230,48	1,153333	11.533,33
4	23/10/2019	1.680,78	0,050000	247,88	1.432,89	4.797,59	1,203333	12.033,33
5	23/11/2019	1.680,78	0,051667	169,31	1.511,47	3.286,12	1,255000	12.550,00
6	23/12/2019	1.680,78	0,050000	79,81	1.600,97	1.685,15	1,305000	13.050,00
7	23/01/2020	1.680,78	0,051667	- 4,37	1.685,15	0,00	1,356667	13.566,67

CAPÍTULO 20

MÉTODO SIMPCOMP OU PACHECO-GONZALEZ (MPG)



MÉTODO SIMPCOMP OU PACHECO-GONZÁLEZ (MPG)

O vocábulo anatocismo deriva do termo latino *anatocismus*, de gênese grega, e significa usura, prêmio composto ou capitalizado (SILVA, 2000); é a cobrança de juros sobre o juro vencido e não pago, que se incorporará ao capital desde o dia do vencimento (DINIZ, 2005).

O primeiro ordenamento jurídico brasileiro a tratar dessa matéria foi o artigo 253, do Código Comercial, vedando “contar juros de juros”, não compreendendo “a acumulação de juros vencidos aos saldos liquidados em conta corrente de ano a ano”.

Posteriormente, o artigo 1.262, do Código Civil, de 1916, deu margem ao anatocismo, “mas só por cláusula expressa”.

A anualidade ficou ratificada com o advento do artigo 4º do Decreto n. 22.626/33: “É proibido contar juros dos juros: esta proibição não compreende a acumulação de juros vencidos aos saldos líquidos em conta corrente de ano a ano.

Porém, fora desse parâmetro anual, a Súmula 121, do Supremo Tribunal Federal, de 13/12/1963, vedou “a capitalização de juros, ainda que expressamente convencionada”.

Essa corte maior, ainda, na Súmula 596 (15/12/1976), liberou as instituições integrantes do Sistema Financeiro Nacional (SFN), públicas ou privadas, para aplicação de taxas de juros e outros encargos cobrados nas suas operações.

A capitalização de juros também foi prevista na Lei 9.514/1997, art. 5º, III (Sistema Financeiro Imobiliário), assim como já estava na Resolução 36/69 - Anexo 1 da RD 75/69 do extinto BNH – Banco Nacional de Habitação.

A prática de capitalização inferior ao ano também foi admitida e ratificada com a edição da Medida Provisória 1.963-17/2000, reeditada sob o número 2.170-36/2001, na condição de pacto expresse.

O Código Civil, de 2002, em seu artigo 591, define que, caso o mútuo seja destinado a fins econômicos, os juros não poderão exceder as taxas definidas no artigo 406, sendo permitida a **capitalização anual**.

Estipula, assim, o aludido 406, que, em caso de “os juros não forem convencionados, ou se o forem sem taxa estipulada, ou quando provierem de determinação de lei, serão fixados segundo a taxa que estiver em vigor para a

mora do pagamento de impostos devidos à Fazenda Nacional”.

Referencial à taxa legal de juros do Artigo 406, do novo Código Civil, pela doutrina, é aquela entendida a ser aplicada ao quantum de 1%, convencionado no artigo 161, § 1º, do Código Tributário Nacional”.

Em consonância com os artigos 84 da Lei 8.981/95; 13 da lei 9.065/95; 39, §4º, da lei 9.250/95; 61, §3.º, da Lei 9.430/96, e artigo 30 da Lei 10.522/02, além de diversos tribunais estaduais, a Corte Especial do Superior Tribunal de Justiça (STJ) definiu a taxa legal de juros, incidente a partir de 11/1/2003 (vigência do Código Civil 2002), como sendo a SELIC (Sistema Especial de Liquidação e Custódia), por ser essa a incidente como juros moratórios dos tributos federais (incluindo atualização monetária), posição adotada em 8/9/2008, ratificada pela Terceira Turma dessa Corte em 28/11/2012.

O artigo 28, §1º, da Lei 10.931/2004, que revogou a Medida Provisória 2.223/2001, criou a Cédula de Crédito Bancário, admitiu a prática de capitalização de juros, sem especificar a periodicidade, e, para contratos acima de 36 meses (artigo 46) permitiu atualização monetária mensal por índices de preços setoriais ou gerais ou pelo índice de remuneração básica dos depósitos de poupança.

A lei 11.977/2009 (Minha Casa, Minha Vida) incluiu o artigo 15-A na Lei 4.380/1964, que previu a capitalização mensal de juros.

A Súmula 539 do STJ (15/6/2015) dispôs que “É permitida a capitalização de juros com periodicidade inferior à anual em contratos celebrados com instituições integrantes do Sistema Financeiro Nacional a partir de 31/3/2000 (MP n. 1.963-17/2000, reeditada como MP n. 2.170-36/2001), desde que expressamente pactuada.”

Por outro lado, a Súmula 541 do STJ (15/6/2015) assim dispôs: “A previsão no contrato bancário de taxa de juros anual superior ao duodécuplo da mensal é suficiente para permitir a cobrança da taxa efetiva anual contratada”.

Conforme visto anteriormente, a solução para a hipótese de capitalização mensal, período a período, ou seja, juros compostos, é dada pelo Método de Juros Compostos.

O Método de Juros Simples é solução para a amortização de financiamentos, mediante prestações sucessivas e de mesmo valor, em casos de incidência mensal de juros simples.

Mas, em todo o País, há milhares de processos judiciais cujo objeto se constitui de ações de revisão de contratos bancários, cuja liquidação estava prevista através de série uniforme de prestações mensais postecipadas, em prazo determinado, sob juros compostos.

Em muitos destes processos, ao invés de expurgo total da capitalização por juros compostos, para juros simples, houve decisões transitadas em julgado que determinaram a capitalização anual de juros, mediante pagamentos mensais de prestações periódicas fixas, sistemática em que há um hibridismo entre os juros simples a cada mês dentro do ano e juros compostos a cada ano.

Transparece lógico que o valor da prestação para liquidar um empréstimo desta natureza seja menor do que a necessária para liquidar o mesmo empréstimo a juros compostos; e maior do que no caso de juros simples.

Em assim sendo, impôs-se o desenvolvimento de sistemática de cálculo para amortização de empréstimos com capitalização anual de juros, sem carência, mediante série uniforme de pagamentos mensais postecipados.

A solução foi encontrada através do Método SimpComp ou Pacheco-González (MPG).

Este sistema de amortização não consta da literatura clássica de Matemática Financeira, e resulta do ordenamento jurídico brasileiro, com base nos preceitos definidos nos seguintes dispositivos legais: artigo 4º do Decreto no 22.626/1933; artigo 253 do Código Comercial (derrogado); artigo 591 do Código Civil de 2002; e jurisprudência decorrente (Súmulas 121 e 596, ambas do STF – Supremo Tribunal Federal).

Assim é que, em diversos processos judiciais, em que a capitalização mensal haja sido expurgada, **passando a vigorar a capitalização anual de juros** em contratos de empréstimos e/ou financiamentos, mediante pagamento de prestações postecipadas, em séries uniformes, de valor fixo, para cumprir ou liquidar os julgados a solução foi obtida através do método Pacheco-Gonzalez.

Equacionado o problema e construído o modelo, inicialmente de forma empírica, e, depois, com o desenvolvimento matemático, a sistemática oferece fórmula geral para o cálculo de prestação mensal, em caso de capitalização anual de juros.

O sistema foi testado e se mostrou consistente e resolutivo em inúmeros casos, ao longo dos últimos anos, tendo os resultados recebido a devida homologação judicial.

Procedimentos do Método SimpComp ou Pacheco-González

O Método SimpComp ou Pacheco-Gonzalez tem amparo técnico na combinação do sistema de juros compostos e de juros simples, pois, na premissa adotada, os juros são capitalizados ao final de cada ano, mas, durante cada ano, há incidência de juros simples.

Desse modo, com auxílio de planilha eletrônica, em um processo empírico, para diversos cenários tendo em conta as variáveis envolvidas, em aproximações sucessivas, visou-se o cálculo do valor uniforme da prestação mensal.

Uma vez que os resultados atendiam os preceitos de parcelas fixas, assim como a incidência de juros simples nos 12 meses de cada ano, e a capitalização ao final de cada período anual, desenvolveu-se uma equação que representa a dinâmica de cálculo, e foi sintetizada uma fórmula geral, conforme se reportará a seguir.

Por exemplo, um empréstimo de R\$ 1.000,00, a ser amortizado em prestações postecipadas periódicas em 24 meses, à taxa de juros compostos, capitalizada de 5% ao mês, importa em valor futuro de R\$ 3.225,10, que é liquidado pelo valor de 24 prestações mensais de R\$ 72,47.

Por juros simples, o valor futuro do empréstimo, R\$ 2.200,00 seria amortizado em 24 parcelas mensais de R\$ 58,20.

E se a capitalização de juros (5% ao mês; 60% ao ano) fosse anual? Valor presente de R\$ 1.000,00; no final do primeiro ano: R\$ 1.600,00; no final de 24 meses, R\$ 2.560,00.

Demonstração teórica do desenvolvimento da fórmula geral do Método SimpComp ou Pacheco-González (por Gabriel Walter González Bochetti)

Para 12 meses, sendo n = prazo e $i\%$ = taxa de juros, o desenvolvimento da fórmula é:

1º mês: prestação PMT_{CA1} :

$$\text{atualização} \rightarrow PMT_{CA} + PMT_{CA} \frac{(n-1) \cdot i\%}{n}$$

2º mês: prestação PMT_{CA2} :

$$\text{atualização} \rightarrow PMT_{CA} + PMT_{CA} \frac{(n-2) \cdot i\%}{n}$$

3º mês: prestação PMT'_{CA3} :

$$\text{atualização} \rightarrow PMT_{CA} + PMT_{CA} \frac{(n-3) \cdot i\%}{n}$$

12º mês: prestação PMT'_{CA12} :

$$\text{atualização} \rightarrow PMT_{CA} + PMT_{CA} \frac{(n-12) \cdot i\%}{n}$$

Então, a soma do 1º mês até o 12º mês tem que ser igual a

$$\begin{aligned} & PV \cdot i\% \text{ anual} + PV \\ & PMT_{CA} + PMT_{CA} \frac{(n-1) \cdot i\%}{n} + \\ & PMT_{CA} + PMT_{CA} \frac{(n-2) \cdot i\%}{n} + \\ & PMT_{CA} + PMT_{CA} \frac{(n-3) \cdot i\%}{n} + \\ & \dots \\ & PMT_{CA} + PMT_{CA} \frac{(n-12) \cdot i\%}{n} = PV \cdot (1 + i\% \text{ anual}) \end{aligned}$$

ou seja:

$$12 \cdot PMT_{CA} + \frac{PMT_{CA} \cdot i\%}{n} \cdot [(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + (n-12)]$$

Observando a expressão que está entre colchetes, é uma P.A. – Progressão Aritmética.

$$\text{A soma dos termos de uma P.A.} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Logo:

$$12 \cdot PMT_{CA} + \frac{PMT_{CA} \cdot i\%}{n} \cdot \frac{[(n-1) + (n-12)]}{2} \cdot n = PV \cdot (1 + i\%)$$

PMT_{CA} é comum às duas expressões e, também, se pode simplificar “n”:

$$PMT_{CA} \cdot [12 + i\% \cdot \frac{(2n - 13)}{2}] \cdot n = PV \cdot (1 + i\%)$$

Multiplicando tudo por 2:

$$PMT_{CA} \cdot [24 + i\% \cdot (2n - 13)] = 2 \cdot PV \cdot (1 + i\%)$$

Isolando PMT_{CA} :

$$PMT_{CA} = \frac{2 \cdot PV \cdot (1 + i\%)}{24 + i\% \cdot (2n - 13)}$$

O número 24 pode ser transformado, neste caso, em “2.n”:

$$PMT_{CA} = \frac{2 \cdot PV \cdot (1 + i\%)}{2n + i\% \cdot (2n - 13)}$$

De acordo com o mesmo raciocínio, para o prazo de 24 meses, tendo presente que, a cada ano ou período de 12 meses, o saldo devedor será reajustado pela taxa anual de juros, tem-se o seguinte desenvolvimento da soma dos termos mensais da progressão aritmética:

$$2 \cdot PMT_{CA} \cdot [12 + i\% \cdot \frac{(2n - 13)}{2}]$$

$$\frac{PMT_{CA}}{2} \cdot [2n + i\% \cdot (2n - 13)] + \{PV \cdot (1 + i\%) - \frac{PMT_{CA}}{2} \cdot [2n - 13]\} \cdot (1 + i\%)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{PMT_{CA}}{2} \cdot [2n + i\% \cdot (2n - 13)] &= \\ &= \frac{PMT_{CA}}{2} \cdot [2n + i\% \cdot (2n - 13)] + PV \cdot (1 + i\%)^2 - \frac{PMT_{CA}}{2} \cdot [2n + i\% \cdot (2n - 13)](1 + i\%) \end{aligned}$$

$$\frac{PMT_{CA}}{2} \cdot [2n + i\% \cdot (2n - 13)] = PV \cdot (1 + i\%)^2 + \frac{PMT_{CA}}{2} \cdot [2n + i\% \cdot (2n - 13)](1 - 1 + i\%)$$

ou

$$\frac{PMT_{CA}}{2} \cdot [2n + i\% \cdot (2n - 13)] = PV \cdot (1 + i\%)^2 - \frac{PMT_{CA}}{2} \cdot [2n + i\% \cdot (2n - 13)]$$

Logo:

$$\frac{\text{PMT}_{\text{CA}}}{2} \cdot [2n + i\% \cdot (2n - 13)] + \frac{\text{PMT}_{\text{CA}}}{2} \cdot [2n + i\% \cdot (2n - 13)] = \text{PV} \cdot (1 + i\%)^2$$

Multiplicando todos os termos pelo número 2, para tirar o denominador:

$$2 \cdot \text{PMT}_{\text{CA}} \cdot [2n + i\% \cdot (2n - 13)] + \text{PMT}_{\text{CA}} \cdot i\% \cdot (2n - 13) = 2 \cdot \text{PV} \cdot (1 + i\%)^2$$

O fator comum permite simplificar a expressão:

$$\text{PMT}_{\text{CA}} \cdot [2n + i\% \cdot (2n - 13)] \cdot (2 + i\%) = 2 \cdot \text{PV} \cdot (1 + i\%)^2$$

Concluindo, a fórmula para a prestação em 24 meses:

$$\text{PMT}_{\text{CA}} = \frac{2 \cdot \text{PV} \cdot (1 + i\%)^2}{(2 + i\%) \cdot [2n + i\% \cdot (2n - 13)]}$$

Para qualquer período, de acordo com os parâmetros prefixados (valor do mútuo em unidades monetárias; prazo em anos; taxa anual de juros), a fórmula de cálculo do valor fixo da prestação mensal, necessária e suficiente para quitar o valor futuro (saldo devedor final resultante da aplicação da taxa de juros, em fluxo de caixa) decorrente de empréstimo, é a seguinte:

$$\text{PMT}_{\text{CA}} = \frac{2 \cdot \text{PV} \cdot i\% \text{ anual} \cdot (1 + i\% \text{ anual})^{n/12}}{[(11 \cdot i\% \text{ anual}) + 24] \cdot [(1 + i\% \text{ anual})^{n/12} - 1]}$$

em que: PMT'_{CA} = valor da prestação mensal

VP = valor do empréstimo ou financiamento na data do contrato

$i_{\text{anual}}\%$ = taxa anual de juros ($i_{\text{mensal}}\% \times 12$)

n = prazo em anos para a liquidação do mútuo.

Após inúmeros testes de casos concretos, consolidados a partir de investigação empírica, que resultou no equacionamento proposto, comprovou-se que a sistemática do Método SimpComp ou Pacheco-González é eficiente e eficaz, e oferece solução segura para o problema proposto; e, depois, através do desenvolvimento matemático da fórmula geral, firmou-se a convicção de ter obtido solução para a hipótese de capitalização anual de juros, em contratos de financiamento a ser liquidados mediante pagamento de série uniforme de prestações mensais.

Retomando o exemplo do empréstimo de R\$ 1.000,00, a ser amortizado em prestações postecipadas mensais em 24 meses, à taxa de juros de 5% ao mês, mediante capitalização anual de juros (5% ao mês; 60% ao ano), valor presente de R\$ 1.000,00, a evolução se dá da seguinte forma: no final do primeiro ano: R\$ 1.600,00; no final do segundo ano, R\$ 2.560,00.

O valor da prestação mensal deve ser de R\$ 64,35, menor do que a necessária para liquidar o mesmo empréstimo a juros compostos; e maior do que no caso de juros simples.

CÁLCULO DA PRESTAÇÃO CONFORME CAPITALIZAÇÃO ANUAL

$$\text{Valor futuro} = PV \times \{[1 + (i \cdot 12)]^{n/12}\} \quad 2.560,00$$

$$\text{PMT} = \text{Valor futuro} / \text{Coeficiente de PMT} \quad 64,35$$

NUM PARC	Meses decorridos no ano	Meses a decorrer no ano	Meses totais a decorrer	Número de anos após o primeiro	Coeficiente 1	Coeficiente 2	Coeficiente do período = 1 x 2
Σ							39,7800
0	0		24				
1	1	11	23	1	1,6000	1,5500	2,4800
2	2	10	22	1	1,6000	1,5000	2,4000
3	3	9	21	1	1,6000	1,4500	2,3200
4	4	8	20	1	1,6000	1,4000	2,2400
5	5	7	19	1	1,6000	1,3500	2,1600
6	6	6	18	1	1,6000	1,3000	2,0800
7	7	5	17	1	1,6000	1,2500	2,0000
8	8	4	16	1	1,6000	1,2000	1,9200
9	9	3	15	1	1,6000	1,1500	1,8400
10	10	2	14	1	1,6000	1,1000	1,7600
11	11	1	13	1	1,6000	1,0500	1,6800
12	12	-	12	1	1,6000	1,0000	1,6000
13	1	11	11	-	1,0000	1,5500	1,5500
14	2	10	10	-	1,0000	1,5000	1,5000
15	3	9	9	-	1,0000	1,4500	1,4500
16	4	8	8	-	1,0000	1,4000	1,4000
17	5	7	7	-	1,0000	1,3500	1,3500
18	6	6	6	-	1,0000	1,3000	1,3000
19	7	5	5	-	1,0000	1,2500	1,2500
20	8	4	4	-	1,0000	1,2000	1,2000
21	9	3	3	-	1,0000	1,1500	1,1500
22	10	2	2	-	1,0000	1,1000	1,1000
23	11	1	1	-	1,0000	1,0500	1,0500
24	12	-	-	-	1,0000	1,0000	1,0000

Segue-se mais um exemplo.

Considere-se VP, valor presente = 17.595,67, taxa anual de juros de 14,40% (1,20% ao mês), prazo de amortização em 4 anos (48 meses), sem carência.

Durante cada período de um ano, mês a mês, os juros são calculados na forma linear, ou seja, juros simples. Mas ao final de cada período de um ano os juros são incorporados ao capital, e esta soma é base de cálculo para o novo período. O capital anterior acrescido dos juros anuais é cotejado com as prestações mensais acrescidas dos juros proporcionais ao tempo que falta para atingir o ano. E assim por diante.

O capital inicial, de R\$ 17.595,67 recebe a incorporação dos juros mensais de 1,20 ao mês (14,40% ao ano) ao final de cada período de 12 meses.

$$17.595,67 \times 1,20\% = 211,14804$$

$$211,14804 \times 12 = 2.533,7764$$

$$2.533,7764 + 17.595,67 = 20.129,446$$

Este é o valor do capital mutuado mais os juros do primeiro ano, base de cálculo para os juros simples do segundo ano.

$$20.129,446 \times 1,20\% = 241,55335$$

$$241,55335 \times 12 = 2.898,6402$$

$$2.898,6402 + 20.129,446 = 23.028,086$$

Este é o valor do capital mutuado mais os juros acumulados do primeiro e do segundo anos, base de cálculo para os juros simples do terceiro ano.

$$23.028,086 \times 1,20\% = 276,33703$$

$$276,33703 \times 12 = 3.316,0443$$

$$3.316,0443 + 23.028,086 = 26.344,13$$

Este é o valor do capital mutuado mais os juros acumulados do primeiro, do segundo e do terceiro anos, base de cálculo para os juros simples do quarto ano.

$$26.344,13 \times 1,20\% = 316,12956$$

$$316,12956 \times 12 = 3.793,56$$

$$3.793,56 + 26.344,13 = \mathbf{30.137,69}$$

Este é o valor do saldo devedor no último mês a ser amortizado pelas 48 prestações mensais.

Mediante aplicação da fórmula, o valor fixo da prestação mensal resulta em 475,96.

Para demonstrar a **validade do cálculo**, utiliza-se o método de análise através da série de fluxo de caixa, tendo como data focal o último mês do contrato.

A prestação do mês 1 recebe apropriação de juros proporcionais aos 11 meses que faltam para completar o 1º ano, e mais os juros anuais do 2º, do 3º, e do 4º ano, totalizando R\$ 806,67 no mês 48.

Da mesma forma, a prestação do mês 2 recebe apropriação de juros proporcionais aos 10 meses que faltam para completar o 1º ano, e mais os juros anuais do 2º, do 3º, e do 4º ano, totalizando 798,12 no mês 48.

E assim por diante até a prestação do mês 12, que atinge 712,61 no mês 48.

A primeira prestação do segundo ano, do mês 13, recebe apropriação de juros proporcionais aos 11 meses que faltam para completar o 2º ano, e mais os juros anuais do 3º e do 4º ano, totalizando 705,13 no mês 48. A prestação 14, 697,66.

E assim por diante até a prestação do mês 24, que atinge 622,91.

A primeira prestação do terceiro ano, do mês 13, recebe apropriação de juros proporcionais aos 11 meses que faltam para completar o 3º ano, e mais os juros anuais do 4º ano, totalizando 616,37 no mês 48. A prestação 26, 609,84.

E assim por diante até a prestação do mês 36, que atinge 544,50.

A prestação do mês 37, a primeira do quarto ano, recebe apropriação de somente juros proporcionais aos 11 meses que faltam para completar o 4º ano, totalizando 538,79, no mês 48. A prestação 38, 533,08.

E assim por diante até a prestação do mês 48, o próprio valor da prestação, 475,96.

A soma das 48 prestações assim atualizadas perfaz 30.137,69, que é exatamente o valor obtido mediante apropriação dos juros anuais ao capital inicialmente mutuado, comprovando que está correto o cálculo.

Ou seja, um empréstimo contratado em 48 meses, mediante capitalização anual dos juros, à razão de 14,40% ao ano (1,20% ao mês), a partir do capital inicial de 17.595,67, e do montante (capital acumulado) a ser amortizado, de 30.137,69, seria totalmente pago pelas 48 prestações mensais fixas de 475,96.

$$\text{Valor futuro} = PV \times [(1 + (i \cdot 12))^n]$$

30.137,69

$$\text{PMT} = \text{Valor futuro} / \text{Coeficiente de PMT}$$

475,96

NUM PARC	Meses decorridos no ano	Meses a decorrer no ano	Meses totais a decorrer	Número de anos após o primeiro	Coeficiente 1	Coeficiente 2	Coeficiente do período	Σ PMT NO INSTANTE N (C.A.)
							63,3195	30.137,69
0	0		48					
1	1	11	47	3	1,4972	1,1320	1,6948	806,67
2	2	10	46	3	1,4972	1,1200	1,6769	798,12
3	3	9	45	3	1,4972	1,1080	1,6589	789,57
4	4	8	44	3	1,4972	1,0960	1,6409	781,02
5	5	7	43	3	1,4972	1,0840	1,6230	772,47
6	6	6	42	3	1,4972	1,0720	1,6050	763,92
7	7	5	41	3	1,4972	1,0600	1,5870	755,36
8	8	4	40	3	1,4972	1,0480	1,5691	746,81
9	9	3	39	3	1,4972	1,0360	1,5511	738,26
10	10	2	38	3	1,4972	1,0240	1,5331	729,71
11	11	1	37	3	1,4972	1,0120	1,5152	721,16
12	12	0	36	3	1,4972	1,0000	1,4972	712,61
13	1	11	35	2	1,3087	1,1320	1,4815	705,13
14	2	10	34	2	1,3087	1,1200	1,4658	697,66
15	3	9	33	2	1,3087	1,1080	1,4501	690,18
16	4	8	32	2	1,3087	1,0960	1,4344	682,71
17	5	7	31	2	1,3087	1,0840	1,4187	675,23
18	6	6	30	2	1,3087	1,0720	1,4030	667,76
19	7	5	29	2	1,3087	1,0600	1,3873	660,28
20	8	4	28	2	1,3087	1,0480	1,3716	652,81
21	9	3	27	2	1,3087	1,0360	1,3559	645,33
22	10	2	26	2	1,3087	1,0240	1,3401	637,86
23	11	1	25	2	1,3087	1,0120	1,3244	630,38
24	12	-	24	2	1,3087	1,0000	1,3087	622,91
25	1	11	23	1	1,1440	1,1320	1,2950	616,37
26	2	10	22	1	1,1440	1,1200	1,2813	609,84
27	3	9	21	1	1,1440	1,1080	1,2676	603,31
28	4	8	20	1	1,1440	1,0960	1,2538	596,77
29	5	7	19	1	1,1440	1,0840	1,2401	590,24
30	6	6	18	1	1,1440	1,0720	1,2264	583,70
31	7	5	17	1	1,1440	1,0600	1,2126	577,17
32	8	4	16	1	1,1440	1,0480	1,1989	570,64
33	9	3	15	1	1,1440	1,0360	1,1852	564,10
34	10	2	14	1	1,1440	1,0240	1,1715	557,57
35	11	1	13	1	1,1440	1,0120	1,1577	551,03
36	12	-	12	1	1,1440	1,0000	1,1440	544,50
37	1	11	11	-	1,0000	1,1320	1,1320	538,79
38	2	10	10	-	1,0000	1,1200	1,1200	533,08
39	3	9	9	-	1,0000	1,1080	1,1080	527,37
40	4	8	8	-	1,0000	1,0960	1,0960	521,65
41	5	7	7	-	1,0000	1,0840	1,0840	515,94
42	6	6	6	-	1,0000	1,0720	1,0720	510,23
43	7	5	5	-	1,0000	1,0600	1,0600	504,52
44	8	4	4	-	1,0000	1,0480	1,0480	498,81
45	9	3	3	-	1,0000	1,0360	1,0360	493,10
46	10	2	2	-	1,0000	1,0240	1,0240	487,39
47	11	1	1	-	1,0000	1,0120	1,0120	481,67
48	12	-	-	-	1,0000	1,0000	1,0000	475,96

O fluxo de caixa das prestações pelo valor de R\$ 475,96, em confronto com o capital inicial atualizado e capitalizado a cada ano, resulta em saldo zero, ao final do período de 48 meses.

Cálculo do saldo devedor mensal e do valor da parcela de juro e de amortização em cada prestação

Há duas formas de cálculo para estas verbas, que atingem o mesmo resultado.

Em cada mês, dentro de cada ano, a parcela de juro contida na prestação é igual ao produto da taxa mensal de juros pela diferença entre o saldo devedor anterior e a soma acumulada das parcelas de juro anteriores dentro do ano em curso.

A parcela de amortização mensal é a diferença entre o valor da prestação mensal e a parcela de juro do mês em curso.

O saldo devedor mensal é o resultado da subtração entre o saldo devedor anterior e a parcela de amortização do mês em curso.

Mas o saldo devedor em cada mês também pode ser apurado mediante o cálculo da subtração entre o saldo devedor no início de cada ano em curso, devidamente atualizado pela taxa mensal de juro até o mês a que se refere o cálculo; e a soma das prestações mensais do ano em curso, dentro de cada período anual, até o mês em análise, que também devem ser atualizadas pela taxa mensal de juro desde a respectiva data de incidência.

A diferença entre o saldo devedor atual, do mês em curso, e o saldo devedor do mês anterior resulta na parcela de amortização em cada mês.

A parcela de juros é o resultado da diferença entre o valor da prestação mensal e o da parcela de amortização em cada mês.

A parcela de amortização mensal é a diferença entre o valor da prestação mensal e a parcela de juro do mês em curso.

O saldo devedor mensal é o resultado da subtração entre o saldo devedor anterior e a parcela de amortização do mês em curso.

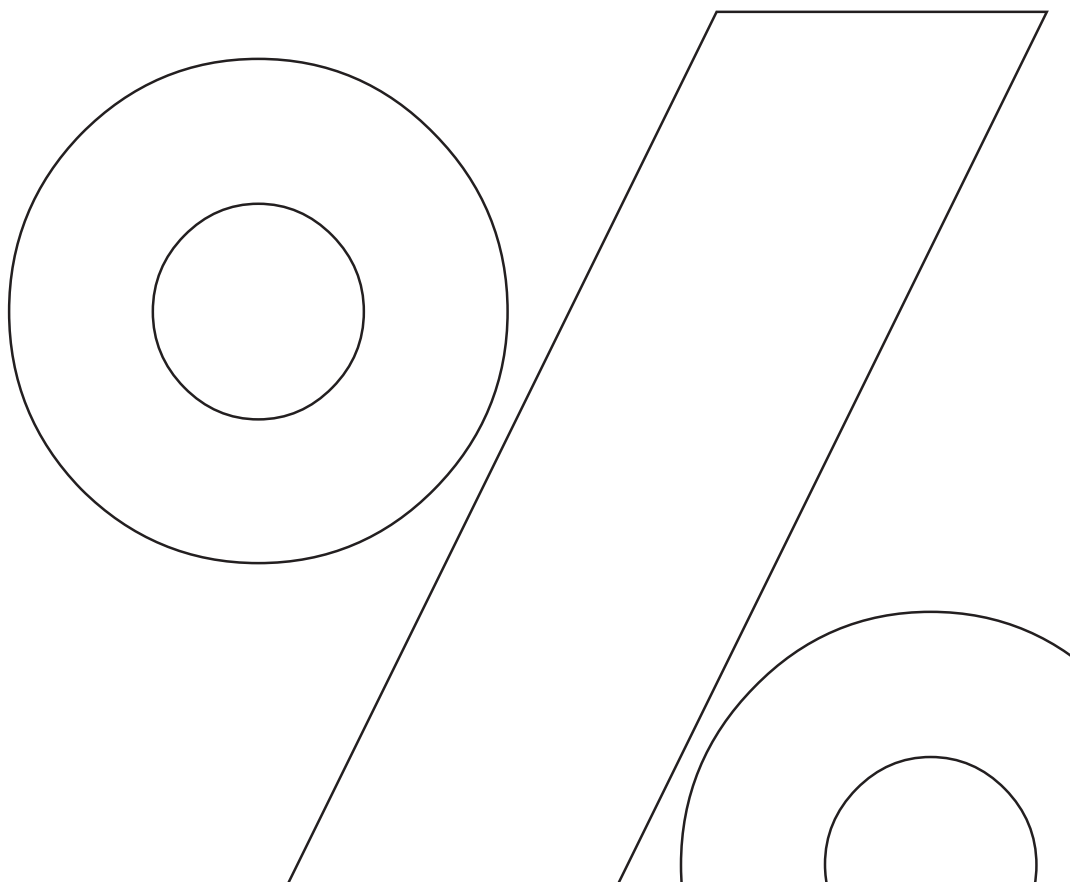
Mas o saldo devedor em cada mês também pode ser apurado mediante o cálculo da subtração entre o saldo devedor no início de cada ano em curso, devidamente atualizado pela taxa mensal de juro até o mês a que se refere o cálculo; e a soma das prestações mensais do ano em curso, dentro de cada período anual, até o mês em análise, que também devem ser atualizadas pela taxa mensal de juro desde a respectiva data de incidência.

NUM PARC	PRESTAÇÃO MENSAL	VALOR DAS PRESTAÇÕES NO FINAL DE CADA ANO														COMPENSAÇÃO ANUAL ENTRE SALDO DEVEDOR E PRESTAÇÕES
1	475,96	12	-	1	=	11	div	12	=	0,9167	x	14,40%	>	1,1320	538,79	Saldo
2	475,96	12	-	2	=	10	div	12	=	0,8333	x	14,40%	>	1,1200	533,08	atualizado
3	475,96	12	-	3	=	9	div	12	=	0,7500	x	14,40%	>	1,1080	527,37	20.129,45
4	475,96	12	-	4	=	8	div	12	=	0,6667	x	14,40%	>	1,0960	521,65	***
5	475,96	12	-	5	=	7	div	12	=	0,5833	x	14,40%	>	1,0840	515,94	Soma das
6	475,96	12	-	6	=	6	div	12	=	0,5000	x	14,40%	>	1,0720	510,23	prestações
7	475,96	12	-	7	=	5	div	12	=	0,4167	x	14,40%	>	1,0600	504,52	atualizadas
8	475,96	12	-	8	=	4	div	12	=	0,3333	x	14,40%	>	1,0480	498,81	6.088,51
9	475,96	12	-	9	=	3	div	12	=	0,2500	x	14,40%	>	1,0360	493,10	***
10	475,96	12	-	10	=	2	div	12	=	0,1667	x	14,40%	>	1,0240	487,39	SALDO
11	475,96	12	-	11	=	1	div	12	=	0,0833	x	14,40%	>	1,0120	481,67	RESIDUAL
12	475,96	12	-	12	=	0	div	12	=	-	x	14,40%	>	1,0000	475,96	14.040,94
***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***
13	475,96	12	-	1	=	11	div	12	=	0,9167	x	14,40%	>	1,1320	538,79	Saldo
14	475,96	12	-	2	=	10	div	12	=	0,8333	x	14,40%	>	1,1200	533,08	atualizado
15	475,96	12	-	3	=	9	div	12	=	0,7500	x	14,40%	>	1,1080	527,37	16.062,83
16	475,96	12	-	4	=	8	div	12	=	0,6667	x	14,40%	>	1,0960	521,65	***
17	475,96	12	-	5	=	7	div	12	=	0,5833	x	14,40%	>	1,0840	515,94	Soma das
18	475,96	12	-	6	=	6	div	12	=	0,5000	x	14,40%	>	1,0720	510,23	prestações
19	475,96	12	-	7	=	5	div	12	=	0,4167	x	14,40%	>	1,0600	504,52	atualizadas
20	475,96	12	-	8	=	4	div	12	=	0,3333	x	14,40%	>	1,0480	498,81	6.088,51
21	475,96	12	-	9	=	3	div	12	=	0,2500	x	14,40%	>	1,0360	493,10	***
22	475,96	12	-	10	=	2	div	12	=	0,1667	x	14,40%	>	1,0240	487,39	SALDO
23	475,96	12	-	11	=	1	div	12	=	0,0833	x	14,40%	>	1,0120	481,67	RESIDUAL
24	475,96	12	-	12	=	0	div	12	=	-	x	14,40%	>	1,0000	475,96	9.974,33
***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***
25	475,96	12	-	1	=	11	div	12	=	0,9167	x	14,40%	>	1,1320	538,79	Saldo
26	475,96	12	-	2	=	10	div	12	=	0,8333	x	14,40%	>	1,1200	533,08	atualizado
27	475,96	12	-	3	=	9	div	12	=	0,7500	x	14,40%	>	1,1080	527,37	11.410,63
28	475,96	12	-	4	=	8	div	12	=	0,6667	x	14,40%	>	1,0960	521,65	***
29	475,96	12	-	5	=	7	div	12	=	0,5833	x	14,40%	>	1,0840	515,94	Soma das
30	475,96	12	-	6	=	6	div	12	=	0,5000	x	14,40%	>	1,0720	510,23	prestações
31	475,96	12	-	7	=	5	div	12	=	0,4167	x	14,40%	>	1,0600	504,52	atualizadas
32	475,96	12	-	8	=	4	div	12	=	0,3333	x	14,40%	>	1,0480	498,81	6.088,51
33	475,96	12	-	9	=	3	div	12	=	0,2500	x	14,40%	>	1,0360	493,10	***
34	475,96	12	-	10	=	2	div	12	=	0,1667	x	14,40%	>	1,0240	487,39	SALDO
35	475,96	12	-	11	=	1	div	12	=	0,0833	x	14,40%	>	1,0120	481,67	RESIDUAL
36	475,96	12	-	12	=	0	div	12	=	-	x	14,40%	>	1,0000	475,96	5.322,12
***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***
37	475,96	12	-	1	=	11	div	12	=	0,9167	x	14,40%	>	1,1320	538,79	Saldo
38	475,96	12	-	2	=	10	div	12	=	0,8333	x	14,40%	>	1,1200	533,08	atualizado
39	475,96	12	-	3	=	9	div	12	=	0,7500	x	14,40%	>	1,1080	527,37	6.088,51
40	475,96	12	-	4	=	8	div	12	=	0,6667	x	14,40%	>	1,0960	521,65	***
41	475,96	12	-	5	=	7	div	12	=	0,5833	x	14,40%	>	1,0840	515,94	Soma das
42	475,96	12	-	6	=	6	div	12	=	0,5000	x	14,40%	>	1,0720	510,23	prestações
43	475,96	12	-	7	=	5	div	12	=	0,4167	x	14,40%	>	1,0600	504,52	atualizadas
44	475,96	12	-	8	=	4	div	12	=	0,3333	x	14,40%	>	1,0480	498,81	6.088,51
45	475,96	12	-	9	=	3	div	12	=	0,2500	x	14,40%	>	1,0360	493,10	***
46	475,96	12	-	10	=	2	div	12	=	0,1667	x	14,40%	>	1,0240	487,39	SALDO
47	475,96	12	-	11	=	1	div	12	=	0,0833	x	14,40%	>	1,0120	481,67	RESIDUAL
48	475,96	12	-	12	=	0	div	12	=	-	x	14,40%	>	1,0000	475,96	0,00
***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***

NUM PARC	MESES NO ANO	JURO MENSAL	SALDO DEVEDOR	PRESTAÇÃO MENSAL	VALOR DA PRESTAÇÃO ATÉ O ÚLTIMO MÊS	PARCELA DE JUROS	PARCELA DE AMORTI-ZAÇÃO	SALDO DEVEDOR RESIDUAL
0			17.595,67					17.595,67
***		***	***	***	***	***	***	***
1	1	211,15	17.806,82	475,96	806,67	211,15	264,81	17.330,86
2	2	211,15	18.017,97	475,96	798,12	205,44	270,53	17.060,33
3	3	211,15	18.229,11	475,96	789,57	199,72	276,24	16.784,09
4	4	211,15	18.440,26	475,96	781,02	194,01	281,95	16.502,14
5	5	211,15	18.651,41	475,96	772,47	188,30	287,66	16.214,48
6	6	211,15	18.862,56	475,96	763,92	182,59	293,37	15.921,11
7	7	211,15	19.073,71	475,96	755,36	176,88	299,08	15.622,03
8	8	211,15	19.284,85	475,96	746,81	171,17	304,79	15.317,23
9	9	211,15	19.496,00	475,96	738,26	165,46	310,51	15.006,73
10	10	211,15	19.707,15	475,96	729,71	159,74	316,22	14.690,51
11	11	211,15	19.918,30	475,96	721,16	154,03	321,93	14.368,58
12	12	211,15	20.129,45	475,96	712,61	148,32	327,64	14.040,94
***		***	***	***	***	***	***	***
13	1	241,55	20.371,00	475,96	705,13	168,49	307,47	13.733,47
14	2	241,55	20.612,55	475,96	697,66	162,78	313,18	13.420,29
15	3	241,55	20.854,11	475,96	690,18	157,07	318,89	13.101,39
16	4	241,55	21.095,66	475,96	682,71	151,36	324,61	12.776,79
17	5	241,55	21.337,21	475,96	675,23	145,65	330,32	12.446,47
18	6	241,55	21.578,77	475,96	667,76	139,93	336,03	12.110,44
19	7	241,55	21.820,32	475,96	660,28	134,22	341,74	11.768,70
20	8	241,55	22.061,87	475,96	652,81	128,51	347,45	11.421,25
21	9	241,55	22.303,43	475,96	645,33	122,80	353,16	11.068,09
22	10	241,55	22.544,98	475,96	637,86	117,09	358,87	10.709,21
23	11	241,55	22.786,53	475,96	630,38	111,38	364,59	10.344,62
24	12	241,55	23.028,09	475,96	622,91	105,66	370,30	9.974,33
***		***	***	***	***	***	***	***
25	1	276,34	23.304,42	475,96	616,37	119,69	356,27	9.618,06
26	2	276,34	23.580,76	475,96	609,84	113,98	361,98	9.256,07
27	3	276,34	23.857,10	475,96	603,31	108,27	367,69	8.888,38
28	4	276,34	24.133,43	475,96	596,77	102,56	373,40	8.514,98
29	5	276,34	24.409,77	475,96	590,24	96,85	379,12	8.135,86
30	6	276,34	24.686,11	475,96	583,70	91,13	384,83	7.751,03
31	7	276,34	24.962,45	475,96	577,17	85,42	390,54	7.360,49
32	8	276,34	25.238,78	475,96	570,64	79,71	396,25	6.964,24
33	9	276,34	25.515,12	475,96	564,10	74,00	401,96	6.562,28
34	10	276,34	25.791,46	475,96	557,57	68,29	407,67	6.154,60
35	11	276,34	26.067,79	475,96	551,03	62,58	413,39	5.741,22
36	12	276,34	26.344,13	475,96	544,50	56,86	419,10	5.322,12
***		***	***	***	***	***	***	***
37	1	316,13	26.660,26	475,96	538,79	63,87	412,10	4.910,03
38	2	316,13	26.976,39	475,96	533,08	58,15	417,81	4.492,22
39	3	316,13	27.292,52	475,96	527,37	52,44	423,52	4.068,70
40	4	316,13	27.608,65	475,96	521,65	46,73	429,23	3.639,47
41	5	316,13	27.924,78	475,96	515,94	41,02	434,94	3.204,52
42	6	316,13	28.240,91	475,96	510,23	35,31	440,65	2.763,87
43	7	316,13	28.557,04	475,96	504,52	29,60	446,37	2.317,50
44	8	316,13	28.873,17	475,96	498,81	23,88	452,08	1.865,43
45	9	316,13	29.189,30	475,96	493,10	18,17	457,79	1.407,64
46	10	316,13	29.505,43	475,96	487,39	12,46	463,50	944,14
47	11	316,13	29.821,56	475,96	481,67	6,75	469,21	474,92
48	12	316,13	30.137,69	475,96	475,96	1,04	474,92	0,00
***		***	***	***	***	***	***	***

CAPÍTULO 21

O INSTANTE "N" E OS SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO



O INSTANTE “N” E OS SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Conhecidos o capital inicial, a taxa e a periodicidade de incidência dos juros, e o prazo do contrato, o momento final ou o instante “n” é o ponto em que se pode aferir o custo efetivo da operação, ou seja, quanto concretamente será pago e/ou recebido.

Também é neste ponto que se pode comparar os diferentes sistemas de amortização, mediante equivalência dos respectivos fluxos de caixa.

Considerado um empréstimo de R\$ 1.000,00, a ser amortizado em prestações postecipadas mensais em 24 meses, à taxa de juros de 5% ao mês, cujas prestações têm valor igual entre si, séries uniformes, por ordem decrescente, os de maior custo efetivo são:

- a) capitalização diária composta: $FV = 3.283,32$, $PMT = 73,07$;
- b) capitalização mensal composta: $FV = 3.225,10$, $PMT = 72,47$;
- c) capitalização anual: $FV = 2.560,00$, $PMT = 64,35$;
- d) capitalização diária simples: $FV = 2.218,33$, $PMT = 58,39$;
- e) capitalização diária simples: $FV = 2.200,00$, $PMT = 58,20$.

A seguir, com base no limite inferior da capitalização mensal simples até o limite superior da capitalização mensal composta, analisa-se os diferentes sistemas de amortização disponíveis..

SAC – Sistema de Amortização Constante (juros decrescentes)

Também é conhecido como Sistema de Amortização Italiano.

As prestações são desiguais entre si, de forma decrescente, assim como os respectivos juros.

Cada parcela é igual à soma do valor fixo da cota de amortização mais o juro do período.

O valor fixo da cota de amortização é obtido pela divisão do capital pelo prazo.

$$A = \frac{PV}{n}$$

A primeira parcela de juros é calculada pela multiplicação da taxa de juros com o capital inicial.

$$J_1 = PV \cdot i\%$$

A primeira prestação é igual à soma da amortização com os juros.

$$PMT_1 = A + J_1$$

O saldo devedor após a primeira prestação resulta da diferença entre o capital inicial e a amortização.

$$SD_1 = PV - A_1$$

A segunda parcela de juros é calculada pela multiplicação da taxa de juros com o saldo devedor anterior.

$$J_2 = SD_1 \cdot i\%$$

A segunda prestação é igual à soma da amortização com os juros.

$$PMT_2 = A + J_2$$

O saldo devedor após a segunda prestação resulta da diferença entre o saldo devedor anterior e a amortização.

$$SD_2 = SD_1 - A$$

Repete-se os procedimentos do cálculo da segunda prestação para todas as seguintes, de forma gradativa.

Um empréstimo de R\$ 1.000,00, a ser amortizado em prestações iguais, em 24 períodos, à taxa de 5% ao período, apresenta a evolução exposta na tabela a seguir.

SAC - Sistema de Amortização Constante (Italiano)

NUM PARC	SALDO DEVEDOR MENSAL	AMORTI- ZAÇÃO NA PRESTAÇÃO	JURO NA PRES- TAÇÃO	PRESTAÇÃO MENSAL	SALDO DEVEDOR RESIDUAL	VALOR DA PRESTAÇÃO ATÉ O ÚLTIMO MÊS (exp)	VALOR DA PRESTAÇÃO ATÉ O ÚLTIMO MÊS (lin)
Σ						3.225,10	2.679,17
0					1.000,00		
1	1.000,00	41,67	50,00	91,67	958,33	281,56	197,08
2	958,33	41,67	47,92	89,58	916,67	262,05	188,13
3	916,67	41,67	45,83	87,50	875,00	243,77	179,38
4	875,00	41,67	43,75	85,42	833,33	226,64	170,83
5	833,33	41,67	41,67	83,33	791,67	210,58	162,50
6	791,67	41,67	39,58	81,25	750,00	195,54	154,38
7	750,00	41,67	37,50	79,17	708,33	181,45	146,46
8	708,33	41,67	35,42	77,08	666,67	168,26	138,75
9	666,67	41,67	33,33	75,00	625,00	155,92	131,25
10	625,00	41,67	31,25	72,92	583,33	144,37	123,96
11	583,33	41,67	29,17	70,83	541,67	133,57	116,88
12	541,67	41,67	27,08	68,75	500,00	123,47	110,00
13	500,00	41,67	25,00	66,67	458,33	114,02	103,33
14	458,33	41,67	22,92	64,58	416,67	105,20	96,88
15	416,67	41,67	20,83	62,50	375,00	96,96	90,63
16	375,00	41,67	18,75	60,42	333,33	89,26	84,58
17	333,33	41,67	16,67	58,33	291,67	82,08	78,75
18	291,67	41,67	14,58	56,25	250,00	75,38	73,13
19	250,00	41,67	12,50	54,17	208,33	69,13	67,71
20	208,33	41,67	10,42	52,08	166,67	63,31	62,50
21	166,67	41,67	8,33	50,00	125,00	57,88	57,50
22	125,00	41,67	6,25	47,92	83,33	52,83	52,71
23	83,33	41,67	4,17	45,83	41,67	48,13	48,13
24	41,67	41,67	2,08	43,75	0,00	43,75	43,75

Importante notar que, aplicando exponenciação em cada uma das prestações até o momento “n”, constata-se que o SAC também contempla juros na mesma intensidade da CJC – Capitalização a Juros Compostos, pois, ao final do prazo “n”, mediante aplicação do fator de capitalização, o valor atualizado da soma das prestações é R\$ 3.225,10.

Se fosse aplicado o fator de juros simples sobre as prestações do SAC, o valor futuro seria igual a R\$ 2.679,17, superior a R\$ 2.200,00, restando demonstrado que a sistemática contém juros compostos e não juros simples.

Mas a quem pretenda fazer o cotejo no instante zero, também é possível demonstrar que o SAC contempla juros compostos, com a mesma intensidade do CJC, uma vez a soma das prestações descapitalizadas de forma composta é exatamente igual ao valor principal, R\$ 1.000,00.

SAC - Sistema de Amortização Constante (Italiano)

NUM PARC	PRESTAÇÃO MENSAL	Fator do valor presente a juros compostos	Valor presente da prestação a juros compostos
		Σ	1.000,00
0			PMT / FVP
1	91,67	1,0500	87,30
2	89,58	1,1025	81,25
3	87,50	1,1576	75,59
4	85,42	1,2155	70,27
5	83,33	1,2763	65,29
6	81,25	1,3401	60,63
7	79,17	1,4071	56,26
8	77,08	1,4775	52,17
9	75,00	1,5513	48,35
10	72,92	1,6289	44,76
11	70,83	1,7103	41,41
12	68,75	1,7959	38,28
13	66,67	1,8856	35,35
14	64,58	1,9799	32,62
15	62,50	2,0789	30,06
16	60,42	2,1829	27,68
17	58,33	2,2920	25,45
18	56,25	2,4066	23,37
19	54,17	2,5270	21,44
20	52,08	2,6533	19,63
21	50,00	2,7860	17,95
22	47,92	2,9253	16,38
23	45,83	3,0715	14,92
24	43,75	3,2251	13,57

SAM – Sistema de Amortização Misto

Este sistema é a média aritmética entre o sistema de juros compostos retro estudado e o SAC, seja para a prestação como para os juros.

A cota de amortização de cada parcela é igual à diferença entre o saldo devedor anterior e os juros do período em análise.

As prestações são decrescentes, assim como os juros em cada parcela; mas as amortizações são crescentes.

SAM - Sistema de Amortização Misto

NUM PARC	SALDO DEVEDOR MENSAL	PRESTAÇÃO JUROS COMPOSTOS	PRESTAÇÃO SAC	PRESTAÇÃO MENSAL	JURO NA PRESTAÇÃO	AMORTIZAÇÃO NA PRESTAÇÃO	SALDO DEVEDOR RESIDUAL	VALOR DA PRESTAÇÃO ATÉ O ÚLTIMO MÊS (exp)	VALOR DA PRESTAÇÃO ATÉ O ÚLTIMO MÊS (lin)
Σ								3.225,10	2.709,28
0	1.000,00								
1	1.000,00	72,47	91,67	82,07	50,00	32,07	967,93	252,08	176,45
2	967,93	72,47	89,58	81,03	48,40	32,63	935,30	237,03	170,16
3	935,30	72,47	87,50	79,99	46,77	33,22	902,08	222,84	163,97
4	902,08	72,47	85,42	78,94	45,10	33,84	868,24	209,46	157,89
5	868,24	72,47	83,33	77,90	43,41	34,49	833,75	196,85	151,91
6	833,75	72,47	81,25	76,86	41,69	35,17	798,58	184,97	146,03
7	798,58	72,47	79,17	75,82	39,93	35,89	762,69	173,78	140,26
8	762,69	72,47	77,08	74,78	38,13	36,64	726,04	163,23	134,60
9	726,04	72,47	75,00	73,74	36,30	37,43	688,61	153,29	129,04
10	688,61	72,47	72,92	72,69	34,43	38,26	650,35	143,93	123,58
11	650,35	72,47	70,83	71,65	32,52	39,13	611,21	135,11	118,23
12	611,21	72,47	68,75	70,61	30,56	40,05	571,16	126,81	112,98
13	571,16	72,47	66,67	69,57	28,56	41,01	530,15	118,99	107,83
14	530,15	72,47	64,58	68,53	26,51	42,02	488,13	111,62	102,79
15	488,13	72,47	62,50	67,49	24,41	43,08	445,06	104,69	97,85
16	445,06	72,47	60,42	66,44	22,25	44,19	400,86	98,17	93,02
17	400,86	72,47	58,33	65,40	20,04	45,36	355,51	92,03	88,29
18	355,51	72,47	56,25	64,36	17,78	46,59	308,92	86,25	83,67
19	308,92	72,47	54,17	63,32	15,45	47,87	261,05	80,81	79,15
20	261,05	72,47	52,08	62,28	13,05	49,22	211,82	75,70	74,73
21	211,82	72,47	50,00	61,24	10,59	50,64	161,18	70,89	70,42
22	161,18	72,47	47,92	60,19	8,06	52,13	109,04	66,36	66,21
23	109,04	72,47	45,83	59,15	5,45	53,70	55,34	62,11	62,11
24	55,34	72,47	43,75	58,11	2,77	55,34	0,00	58,11	58,11

Da mesma forma que o SAC, aplicando exponenciação em cada uma das prestações até o momento “n”, constata-se que o SAM também contempla juros na mesma intensidade da CJC – Capitalização a Juros Compostos, pois, ao final do prazo “n”, mediante aplicação do fator de capitalização, o valor atualizado da soma das prestações é R\$ 3.225,10.

Se fosse aplicado o fator de juros simples sobre as prestações do SAM, o valor futuro seria igual a R\$ 2.709,28, também superior a R\$ 2.200,00, restando demonstrado que a sistemática contém juros compostos e não juros simples.

Também, a soma das prestações descapitalizadas de forma composta, para o instante zero, é exatamente igual ao valor principal, R\$ 1.000,00, restando demonstrado que o SAM contempla juros compostos, com a mesma intensidade do CJC.

SAM - Sistema de Amortização Misto

NUM PARC	PRESTAÇÃO MENSAL	Fator do valor presente a juros compostos	Valor presente da prestação a juros compostos
24		Σ	1.000,00
0			PMT / FVP
1	82,07	1,0500	78,16
2	81,03	1,1025	73,49
3	79,99	1,1576	69,09
4	78,94	1,2155	64,95
5	77,90	1,2763	61,04
6	76,86	1,3401	57,35
7	75,82	1,4071	53,88
8	74,78	1,4775	50,61
9	73,74	1,5513	47,53
10	72,69	1,6289	44,63
11	71,65	1,7103	41,89
12	70,61	1,7959	39,32
13	69,57	1,8856	36,89
14	68,53	1,9799	34,61
15	67,49	2,0789	32,46
16	66,44	2,1829	30,44
17	65,40	2,2920	28,53
18	64,36	2,4066	26,74
19	63,32	2,5270	25,06
20	62,28	2,6533	23,47
21	61,24	2,7860	21,98
22	60,19	2,9253	20,58
23	59,15	3,0715	19,26
24	58,11	3,2251	18,02

SAA – Sistema Americano de Amortização

Os juros são pagos ao final de cada período do prazo do contrato, e, no último, também é pago o valor principal.

SAA - Sistema Americano de Amortização

NUM PARC	VALOR DA PARCELA	VALOR DA PRESTAÇÃO ATÉ O ÚLTIMO MÊS (exp)	VALOR DA PRESTAÇÃO ATÉ O ÚLTIMO MÊS (lin)
Σ		3.225,10	2.890,00
1	50,00	153,58	107,50
2	50,00	146,26	105,00
3	50,00	139,30	102,50
4	50,00	132,66	100,00
5	50,00	126,35	97,50
6	50,00	120,33	95,00
7	50,00	114,60	92,50
8	50,00	109,14	90,00
9	50,00	103,95	87,50
10	50,00	99,00	85,00
11	50,00	94,28	82,50
12	50,00	89,79	80,00
13	50,00	85,52	77,50
14	50,00	81,44	75,00
15	50,00	77,57	72,50
16	50,00	73,87	70,00
17	50,00	70,36	67,50
18	50,00	67,00	65,00
19	50,00	63,81	62,50
20	50,00	60,78	60,00
21	50,00	57,88	57,50
22	50,00	55,13	55,00
23	50,00	52,50	52,50
24	1.050,00	1.050,00	1.050,00

Da mesma forma que o SAC e o SAM, aplicando exponenciação em cada uma das prestações até o momento “n”, constata-se que o SAA também contempla juros na mesma intensidade da CJC – Capitalização a Juros Compostos, pois, ao final do prazo “n”, mediante aplicação do fator de capitalização, o valor atualizado da soma das prestações é R\$ 3.225,10.

Se fosse aplicado o fator de juros simples sobre as prestações do SAA, o valor futuro seria igual a R\$ 2.890,00, ainda superior a R\$ 2.200,00, restando demonstrado que a sistemática contém juros compostos e não juros simples.

A soma das prestações descapitalizadas de forma composta, para o instante zero, também é exatamente igual ao valor principal, R\$ 1.000,00, restando demonstrado que o SAA contempla juros compostos, com a mesma intensidade do CJC.

SAA - Sistema Americano de Amortização

NUM PARC	PRESTAÇÃO MENSAL	Fator do valor presente a juros compostos	Valor presente da prestação a juros compostos
24		Σ	1.000,00
0			PMT / FVP
1	50,00	1,0500	47,62
2	50,00	1,1025	45,35
3	50,00	1,1576	43,19
4	50,00	1,2155	41,14
5	50,00	1,2763	39,18
6	50,00	1,3401	37,31
7	50,00	1,4071	35,53
8	50,00	1,4775	33,84
9	50,00	1,5513	32,23
10	50,00	1,6289	30,70
11	50,00	1,7103	29,23
12	50,00	1,7959	27,84
13	50,00	1,8856	26,52
14	50,00	1,9799	25,25
15	50,00	2,0789	24,05
16	50,00	2,1829	22,91
17	50,00	2,2920	21,81
18	50,00	2,4066	20,78
19	50,00	2,5270	19,79
20	50,00	2,6533	18,84
21	50,00	2,7860	17,95
22	50,00	2,9253	17,09
23	50,00	3,0715	16,28
24	1.050,00	3,2251	325,57

SACRE – Sistema de Amortização Crescente

O SACRE é um sistema derivado do SAC, adotado para financiamentos com prazo superior a 12 meses.

A quitação do empréstimo ocorre de forma acelerada.

A prestação inicial é mantida fixa por 12 meses, e recalculada, após cada período anual, com base no saldo devedor então apurado e de acordo com o número de períodos a cumprir até o prazo “n”.

Para os primeiros 12 meses, a prestação obtida pelo SAC é igual à soma da divisão entre o capital inicial e o número de períodos com o produto do capital inicial pela taxa de juros.

$$\text{PMT} = \frac{\text{PV}}{n} + \text{PV} \cdot i\%$$

A primeira parcela de juros contida na prestação é apurada mediante produto entre o capital inicial e a taxa de juros. A primeira cota de amortização é igual à diferença entre a primeira prestação e os juros correspondentes.

A cada período posterior, os juros contidos em cada prestação resultam do produto entre o saldo devedor anterior e a taxa de juros. A cota de amortização equivale à diferença entre o valor da prestação e cota de juros correspondente.

O saldo devedor residual é sempre igual à subtração entre o saldo anterior e a cota de amortização.

Nos períodos de 12 meses seguintes, recalcula-se a prestação com base no saldo devedor do último período anual anterior, tendo em conta o número de períodos a cumprir até o prazo “n”.

É possível que a(s) última(s) prestação(ões) se torne(m) inexigível(is) em razão da quitação acelerada do financiamento.

Este sistema também capitaliza juros de forma composta. Aplicando exponenciação em cada uma das prestações até o momento “n”, constata-se que o SACRE também contempla juros, com a mesma intensidade do que a CJC – Capitalização a Juros Compostos, pois, ao final do prazo “n”, mediante aplicação do fator de capitalização, o valor atualizado da soma das prestações é R\$ 3.225,10.

Se fosse aplicado o fator de juros simples sobre as prestações do SACRE, o valor futuro seria igual a R\$ 2.639,65, bem superior a R\$ 2.200,00, restando demonstrado que a sistemática não contém juros simples.

SACRE - Sistema de Amortização Crescente

NUM PARC	SALDO DEVEDOR MENSAL	PRESTAÇÃO MENSAL	JURO NA PRESTAÇÃO	AMORTIZAÇÃO NA PRESTAÇÃO	SALDO DEVEDOR RESIDUAL	VALOR DA PRESTAÇÃO ATÉ O ÚLTIMO MÊS (exp)	VALOR DA PRESTAÇÃO ATÉ O ÚLTIMO MÊS (lin)
Σ						3.225,10	2.639,65
1	1.000,00	91,67	50,00	41,67	958,33	281,56	197,08
2	958,33	91,67	47,92	43,75	914,58	268,15	192,50
3	914,58	91,67	45,73	45,94	868,65	255,38	187,92
4	868,65	91,67	43,43	48,23	820,41	243,22	183,33
5	820,41	91,67	41,02	50,65	769,77	231,64	178,75
6	769,77	91,67	38,49	53,18	716,59	220,61	174,17
7	716,59	91,67	35,83	55,84	660,75	210,10	169,58
8	660,75	91,67	33,04	58,63	602,12	200,10	165,00
9	602,12	91,67	30,11	61,56	540,56	190,57	160,42
10	540,56	91,67	27,03	64,64	475,92	181,49	155,83
11	475,92	91,67	23,80	67,87	408,05	172,85	151,25
12	408,05	91,67	20,40	71,26	336,79	164,62	146,67
13	336,79	44,90	16,84	28,07	308,72	76,80	69,60
14	308,72	44,90	15,44	29,47	279,25	73,15	67,36
15	279,25	44,90	13,96	30,94	248,31	69,66	65,11
16	248,31	44,90	12,42	32,49	215,82	66,34	62,87
17	215,82	44,90	10,79	34,11	181,71	63,19	60,62
18	181,71	44,90	9,09	35,82	145,89	60,18	58,38
19	145,89	44,90	7,29	37,61	108,28	57,31	56,13
20	108,28	44,90	5,41	39,49	68,79	54,58	53,89
21	68,79	44,90	3,44	41,47	27,32	51,98	51,64
22	27,32	28,69	1,37	27,32	-	31,63	31,56
23	-	-	-	-	-	-	-
24	-	-	-	-	-	-	-

A soma das prestações descapitalizadas de forma composta, para o instante zero, também é exatamente igual ao valor principal, R\$ 1.000,00, restando demonstrado que o SACRE contempla juros compostos, com a mesma intensidade do CJC.

SACRE - Sistema de Amortização Crescente

NUM PARC	PRESTAÇÃO MENSAL	Fator do valor presente a juros compostos	Valor presente da prestação a juros compostos
24		Σ	1.000,00
0			PMT / FVP
1	91,67	1,0500	87,30
2	91,67	1,1025	83,14
3	91,67	1,1576	79,19
4	91,67	1,2155	75,41
5	91,67	1,2763	71,82
6	91,67	1,3401	68,40
7	91,67	1,4071	65,15
8	91,67	1,4775	62,04
9	91,67	1,5513	59,09
10	91,67	1,6289	56,28
11	91,67	1,7103	53,60
12	91,67	1,7959	51,04
13	44,90	1,8856	23,81
14	44,90	1,9799	22,68
15	44,90	2,0789	21,60
16	44,90	2,1829	20,57
17	44,90	2,2920	19,59
18	44,90	2,4066	18,66
19	44,90	2,5270	17,77
20	44,90	2,6533	16,92
21	44,90	2,7860	16,12
22	28,69	2,9253	9,81
23	-	3,0715	-
24	-	3,2251	-

Os cinco métodos, CJC, SAC, SAM, SAA e SACRE (primeiro modelo) são equivalentes.

Há também quem, no SACRE, além da prestação utilize juros fixos em cada grupo de 12 meses.

SACRE 2 - Sistema de Amortização Crescente

NUM PARC	SALDO DEVEDOR MENSAL	PRESTAÇÃO MENSAL	JURO NA PRESTAÇÃO	AMORTIZAÇÃO NA PRESTAÇÃO	SALDO DEVEDOR RESIDUAL	Σ PMT NO INSTANTE N (exp)	Σ PMT NO INSTANTE N (lin)
Σ						3.681,42	3.082,50
1	1.000,00	91,67	50,00	41,67	958,33	281,56	197,08
2	958,33	91,67	50,00	41,67	916,67	268,15	192,50
3	916,67	91,67	50,00	41,67	875,00	255,38	187,92
4	875,00	91,67	50,00	41,67	833,33	243,22	183,33
5	833,33	91,67	50,00	41,67	791,67	231,64	178,75
6	791,67	91,67	50,00	41,67	750,00	220,61	174,17
7	750,00	91,67	50,00	41,67	708,33	210,10	169,58
8	708,33	91,67	50,00	41,67	666,67	200,10	165,00
9	666,67	91,67	50,00	41,67	625,00	190,57	160,42
10	625,00	91,67	50,00	41,67	583,33	181,49	155,83
11	583,33	91,67	50,00	41,67	541,67	172,85	151,25
12	541,67	91,67	50,00	41,67	500,00	164,62	146,67
13	500,00	66,67	25,00	41,67	458,33	114,02	103,33
14	458,33	66,67	25,00	41,67	416,67	108,59	100,00
15	416,67	66,67	25,00	41,67	375,00	103,42	96,67
16	375,00	66,67	25,00	41,67	333,33	98,50	93,33
17	333,33	66,67	25,00	41,67	291,67	93,81	90,00
18	291,67	66,67	25,00	41,67	250,00	89,34	86,67
19	250,00	66,67	25,00	41,67	208,33	85,09	83,33
20	208,33	66,67	25,00	41,67	166,67	81,03	80,00
21	166,67	66,67	25,00	41,67	125,00	77,18	76,67
22	125,00	66,67	25,00	41,67	83,33	73,50	73,33
23	83,33	66,67	25,00	41,67	41,67	70,00	70,00
24	41,67	66,67	25,00	41,67	0,00	66,67	66,67

Neste caso, o modelo alternativo do SACRE contempla juros em maior intensidade do que os sistemas de juros compostos anteriormente vistos.

No momento “n”, as prestações equivaleriam a R\$ 3.681,42, maior do que R\$ 3.225,10. A juros simples, R\$ 3.082,50, maior do que R\$ 2.200,00. No momento zero, R\$ 1.141,49, maior do que R\$ 1.000,00.

SAC invertido (juros crescentes)

As prestações são desiguais entre si, de forma crescente.

Cada parcela é igual à soma do valor fixo da cota de amortização mais o juro do período.

O valor fixo da cota de amortização é obtido pela divisão do capital pelo prazo.

$$A = PV / n$$

A primeira parcela de juros é calculada pela multiplicação da taxa de juros pela cota de amortização e o número do período correspondente “1”.

$$J_1 = A \cdot i\% \cdot n_1$$

A primeira prestação é igual à soma da amortização com os juros.

$$PMT_1 = A + J_1$$

O saldo devedor após a primeira prestação resulta da diferença entre o capital inicial e a amortização.

$$SD_1 = PV - A_1$$

A segunda parcela de juros é calculada pela multiplicação da taxa de juros pela cota de amortização e o número do período correspondente “2”.

$$J_2 = A \cdot i\% \cdot n_2$$

A segunda prestação é igual à soma da amortização com os juros.

$$PMT_2 = A + J_2$$

O saldo devedor após a segunda prestação resulta da diferença entre o saldo devedor anterior e a amortização.

$$SD_2 = SD_1 - A$$

Repete-se os procedimentos do cálculo da segunda prestação para todas as seguintes, de forma gradativa.

Ao final, constata-se que o SAC invertido também contempla juros compostos, $FV = R\$ 2.801,21$, embora com menos intensidade do que os sistemas anteriores (CJC, SAC, SAM, SAA e SACRE).

Se fosse aplicado o fator de juros simples sobre as prestações do SAC invertido, o valor futuro seria igual a $R\$ 2.439,58$, ainda superior a $R\$ 2.200,00$, restando demonstrado que a sistemática contém juros compostos e não juros simples.

SAC - Sistema de Amortização Constante INVERTIDO

NUM PARC	SALDO DEVEDOR MENSAL	AMORTIZAÇÃO NA PRESTAÇÃO	JURO NA PRESTAÇÃO	PRESTAÇÃO MENSAL	SALDO DEVEDOR RESIDUAL	VALOR DA PRESTAÇÃO ATÉ O ÚLTIMO MÊS (exp)	VALOR DA PRESTAÇÃO ATÉ O ÚLTIMO MÊS (lin)
Σ						2.801,21	2.439,58
0					1.000,00		
1	1.000,00	41,67	2,08	43,75	958,33	134,38	94,06
2	958,33	41,67	4,17	45,83	916,67	134,07	96,25
3	916,67	41,67	6,25	47,92	875,00	133,49	98,23
4	875,00	41,67	8,33	50,00	833,33	132,66	100,00
5	833,33	41,67	10,42	52,08	791,67	131,61	101,56
6	791,67	41,67	12,50	54,17	750,00	130,36	102,92
7	750,00	41,67	14,58	56,25	708,33	128,93	104,06
8	708,33	41,67	16,67	58,33	666,67	127,33	105,00
9	666,67	41,67	18,75	60,42	625,00	125,60	105,73
10	625,00	41,67	20,83	62,50	583,33	123,75	106,25
11	583,33	41,67	22,92	64,58	541,67	121,78	106,56
12	541,67	41,67	25,00	66,67	500,00	119,72	106,67
13	500,00	41,67	27,08	68,75	458,33	117,59	106,56
14	458,33	41,67	29,17	70,83	416,67	115,38	106,25
15	416,67	41,67	31,25	72,92	375,00	113,12	105,73
16	375,00	41,67	33,33	75,00	333,33	110,81	105,00
17	333,33	41,67	35,42	77,08	291,67	108,46	104,06
18	291,67	41,67	37,50	79,17	250,00	106,09	102,92
19	250,00	41,67	39,58	81,25	208,33	103,70	101,56
20	208,33	41,67	41,67	83,33	166,67	101,29	100,00
21	166,67	41,67	43,75	85,42	125,00	98,88	98,23
22	125,00	41,67	45,83	87,50	83,33	96,47	96,25
23	83,33	41,67	47,92	89,58	41,67	94,06	94,06
24	41,67	41,67	50,00	91,67	0,00	91,67	91,67

MAJS – Método de Amortização a Juros Simples

Este método é apresentado como se contemplasse juros simples, desenvolvido a partir do método hamburguês.

As prestações são desiguais entre si.

O valor do principal da parcela é apurado pela divisão do valor do financiamento pelo prazo do contrato.

Periodicamente, os juros são exigidos sobre o valor do principal da parcela à taxa contratada pelo prazo decorrido entre a data do contrato e a do vencimento da parcela.

Os juros sobre o saldo do principal não amortizado são calculados à taxa contratada pelo prazo decorrido entre a data do contrato e a data do cálculo, gerando juros a receber.

Este sistema também capitaliza juros de forma composta, na mesma intensidade do SAC invertido, menos que os demais sistemas (CJC, SAC, SAM, SAA e SACRE).

Aplicando exponenciação em cada uma das prestações até o momento “n”, constata-se que, no MAJS, mediante aplicação do fator de capitalização, o valor atualizado da soma das prestações é R\$ 2.801,21.

Aplicando juros lineares em cada uma das prestações até o momento “n”, constata-se que o valor atualizado da soma das prestações é R\$ 2.439,58, maior do que o valor do fluxo de caixa obtido sob a CJS – Capitalização por Juros Simples, R\$ 2.200,00.

MAJS - Método de Amortização a Juros Simples

NUM PARC	PRT	SALDO PRINCIPAL	AMORTIZAÇÃO	JURO NA PRESTAÇÃO	JUROS A RECEBER	PRESTAÇÃO MENSAL	SALDO DEVEDOR	Σ PMT NO INSTANTE N (lin)	Σ PMT NO INSTANTE N (exp)
Σ								2.439,58	2.801,21
0		1.000,00							
1	24	958,33	41,67	2,08	47,92	43,75	1.006,25	94,06	134,38
2	23	916,67	41,67	4,17	91,67	45,83	1.008,33	96,25	134,07
3	22	875,00	41,67	6,25	131,25	47,92	1.006,25	98,23	133,49
4	21	833,33	41,67	8,33	166,67	50,00	1.000,00	100,00	132,66
5	20	791,67	41,67	10,42	197,92	52,08	989,58	101,56	131,61
6	19	750,00	41,67	12,50	225,00	54,17	975,00	102,92	130,36
7	18	708,33	41,67	14,58	247,92	56,25	956,25	104,06	128,93
8	17	666,67	41,67	16,67	266,67	58,33	933,33	105,00	127,33
9	16	625,00	41,67	18,75	281,25	60,42	906,25	105,73	125,60
10	15	583,33	41,67	20,83	291,67	62,50	875,00	106,25	123,75
11	14	541,67	41,67	22,92	297,92	64,58	839,58	106,56	121,78
12	13	500,00	41,67	25,00	300,00	66,67	800,00	106,67	119,72
13	12	458,33	41,67	27,08	297,92	68,75	756,25	106,56	117,59
14	11	416,67	41,67	29,17	291,67	70,83	708,33	106,25	115,38
15	10	375,00	41,67	31,25	281,25	72,92	656,25	105,73	113,12
16	9	333,33	41,67	33,33	266,67	75,00	600,00	105,00	110,81
17	8	291,67	41,67	35,42	247,92	77,08	539,58	104,06	108,46
18	7	250,00	41,67	37,50	225,00	79,17	475,00	102,92	106,09
19	6	208,33	41,67	39,58	197,92	81,25	406,25	101,56	103,70
20	5	166,67	41,67	41,67	166,67	83,33	333,33	100,00	101,29
21	4	125,00	41,67	43,75	131,25	85,42	256,25	98,23	98,88
22	3	83,33	41,67	45,83	91,67	87,50	175,00	96,25	96,47
23	2	41,67	41,67	47,92	47,92	89,58	89,58	94,06	94,06
24	1	-	41,67	50,00	-	91,67	-	91,67	91,67

MPC-JS – Método da Prestação Constante a Juros Simples

Este método também é apresentado como se contemplasse juros simples, em equivalência feita no instante zero.

A partir da fórmula:

$$FV = PV \cdot (1 + i \cdot n)$$

isola-se o fator

$$FS = 1 / (1 + i \cdot n)$$

de cada período.

A prestação será igual à divisão entre o capital inicial e a soma dos fatores.

$$PMT = PV / \sum FS$$

$$PMT = PV / \sum (1 + i \cdot n_m)$$

Aplicando juros lineares em cada uma das prestações até o momento “n”, constata-se que o valor atualizado da soma das prestações é R\$ 2.438,75, maior do que o valor do fluxo de caixa obtido sob a CJS – Capitalização por Juros Simples, R\$ 2.200,00, significando que o método contempla juros compostos, embora em menor intensidade do que a CJC, SAC, SAM, SAC invertido, SACRE e MAJS.

Mediante exponenciação em cada uma das prestações até o momento “n”, constata-se que, mediante aplicação do fator de capitalização, o valor atualizado da soma das prestações é R\$ 2.871,15.

MPC-JS ou SA-JS Método da Prestação Constante a Juros Simples ou Sistema de Amortização a Juros Simples

NUM PARC	Fator Simples	PRESTAÇÃO MENSAL	Amortização na PMT	Saldo devedor	Σ PMT NO INSTANTE N (lin)	Σ PMT NO INSTANTE N (exp)
Σ FS	15,4997247				2.438,75	2.871,15
0				1.000,00		
1	0,9523810	64,52	61,45	985,48	138,71	198,17
2	0,9090909	64,52	58,65	967,89	135,49	188,73
3	0,8695652	64,52	56,10	947,37	132,26	179,74
4	0,8333333	64,52	53,76	924,04	129,03	171,18
5	0,8000000	64,52	51,61	898,03	125,81	163,03
6	0,7692308	64,52	49,63	869,43	122,58	155,27
7	0,7407407	64,52	47,79	838,35	119,36	147,87
8	0,7142857	64,52	46,08	804,89	116,13	140,83
9	0,6896552	64,52	44,49	769,12	112,91	134,13
10	0,6666667	64,52	43,01	731,12	109,68	127,74
11	0,6451613	64,52	41,62	690,97	106,45	121,66
12	0,6250000	64,52	40,32	648,75	103,23	115,86
13	0,6060606	64,52	39,10	604,50	100,00	110,35
14	0,5882353	64,52	37,95	558,30	96,78	105,09
15	0,5714286	64,52	36,87	510,21	93,55	100,09
16	0,5555556	64,52	35,84	460,27	90,32	95,32
17	0,5405405	64,52	34,87	408,53	87,10	90,78
18	0,5263158	64,52	33,96	355,06	83,87	86,46
19	0,5128205	64,52	33,09	299,88	80,65	82,34
20	0,5000000	64,52	32,26	243,06	77,42	78,42
21	0,4878049	64,52	31,47	184,62	74,19	74,69
22	0,4761905	64,52	30,72	124,60	70,97	71,13
23	0,4651163	64,52	30,01	63,05	67,74	67,74
24	0,4545455	64,52	29,33	0,00	64,52	64,52

SAC a Juros Simples

De acordo com Rovina, para linearizar o SAC (Italiano), o índice de ponderação é calculado segundo a fórmula:

$$\text{ind} = \frac{(3 \cdot \text{PV} \cdot i\%)}{\{(2 \cdot n \cdot i\%) - [(2 \cdot i\%) + 3] \cdot n\}}$$

$$\text{ind} = 1,179245$$

e a planilha do financiamento é construída da seguinte forma:

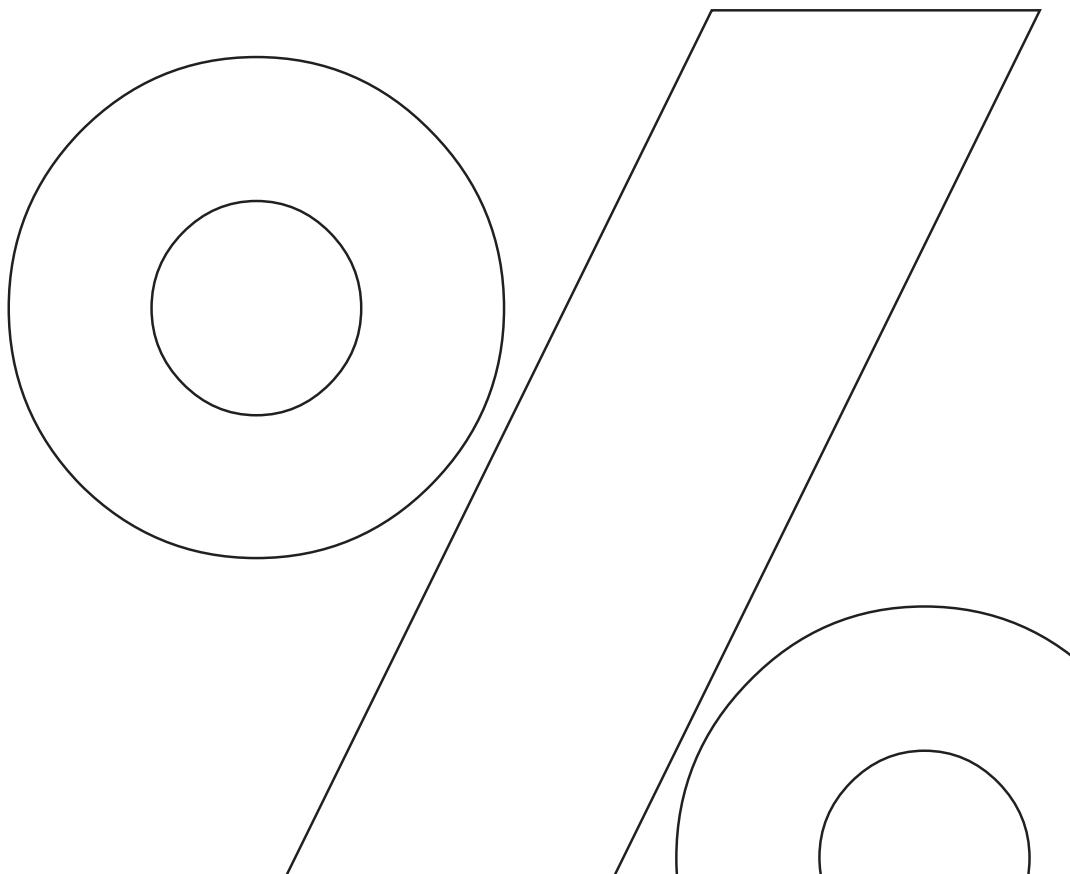
SAC - Sistema de Amortização Constante a Juros Simples

NUM PARC	SALDO DEVEDOR MENSAL	AMORTIZAÇÃO NA PRESTAÇÃO	JURO NA PRESTAÇÃO	PRESTAÇÃO MENSAL	SALDO DEVEDOR RESIDUAL	Σ PMT NO INSTANTE N (exp)	Σ PMT NO INSTANTE N (lin)
Σ						2.630,20	2.200,00
0					1.000,00		
1	1.000,00	41,67	28,30	69,97	958,33	214,91	150,43
2	958,33	41,67	27,12	68,79	916,67	201,23	144,46
3	916,67	41,67	25,94	67,61	875,00	188,36	138,60
4	875,00	41,67	24,76	66,43	833,33	176,26	132,86
5	833,33	41,67	23,58	65,25	791,67	164,89	127,24
6	791,67	41,67	22,41	64,07	750,00	154,20	121,74
7	750,00	41,67	21,23	62,89	708,33	144,15	116,35
8	708,33	41,67	20,05	61,71	666,67	134,71	111,08
9	666,67	41,67	18,87	60,53	625,00	125,85	105,94
10	625,00	41,67	17,69	59,36	583,33	117,52	100,90
11	583,33	41,67	16,51	58,18	541,67	109,70	95,99
12	541,67	41,67	15,33	57,00	500,00	102,36	91,19
13	500,00	41,67	14,15	55,82	458,33	95,47	86,52
14	458,33	41,67	12,97	54,64	416,67	89,00	81,96
15	416,67	41,67	11,79	53,46	375,00	82,93	77,52
16	375,00	41,67	10,61	52,28	333,33	77,24	73,19
17	333,33	41,67	9,43	51,10	291,67	71,90	68,99
18	291,67	41,67	8,25	49,92	250,00	66,90	64,90
19	250,00	41,67	7,08	48,74	208,33	62,21	60,93
20	208,33	41,67	5,90	47,56	166,67	57,81	57,08
21	166,67	41,67	4,72	46,38	125,00	53,69	53,34
22	125,00	41,67	3,54	45,20	83,33	49,84	49,72
23	83,33	41,67	2,36	44,03	41,67	46,23	46,23
24	41,67	41,67	1,18	42,85	0,00	42,85	42,85

Este é o único sistema de amortização que se equipara à CJS – Capitalização por Juros Simples, pois, no momento “n”, a soma do valor atualizado das prestações é 2.200,00.

CAPÍTULO 22

A PRESTAÇÃO PERFEITA



A PRESTAÇÃO PERFEITA

A prestação perfeita é aquela que, mediante soma atualizada de cada um de seus valores ao longo do prazo do financiamento, implica no valor futuro obtido no momento “n”, mediante construção de um plano com base nos parâmetros iniciais, e, ao mesmo tempo, em sentido contrário, deve conduzir ao exato valor presente, no momento zero, mediante operação inversa com base nos mesmos fundamentos.

Retome-se o exemplo: $PV = R\$ 10.000,00$; $n = 7$; $i\% = 5\%$.

Assim, para um único valor principal, em juros compostos, o valor futuro é:

$$FV_{JC} = PV \cdot (1 + i\%)^n$$

$$FV_{JC} = 14.071,00$$

A operação inversa, para cálculo do valor presente é:

$$PV = FV_{JC} / (1 + i\%)^n$$

$$PV = 10.000,00$$

Em juros simples:

$$FV_{JS} = PV \cdot (1 + i\% \cdot n)$$

$$FV_{JS} = 13.500,00$$

A operação inversa é:

$$PV = FV_{JS} / (1 + i\% \cdot n)$$

$$PV = 10.000,00$$

Conforme visto nos capítulos 10 e 11, para série uniforme (mesmo valor, com intervalo regular entre si), sob juros compostos, com base no valor futuro, a fórmula da prestação é:

$$\text{PMT}_{\text{JC}} = \frac{\text{FV}_{\text{JC}} \cdot i\%}{(1 + i\%)^n - 1}$$

$$\text{PMT}_{\text{JC}} = 1.728,20$$

A operação inversa é:

$$\text{FV}_{\text{JC}} = \frac{\text{PMT}_{\text{JC}} \cdot [(1 + i\%)^n - 1]}{i\%}$$

$$\text{FV}_{\text{JC}} = 14.071,00$$

O valor futuro FV_{JC} também pode ser obtido mediante soma do valor futuro de cada uma das prestações atualizadas, desde a sua ocorrência até o momento “n”.

$$\text{FV}_{\text{JCm}} = \text{PMT}_{\text{JCm}} \cdot (1 + i\%)^{n-m}$$

$$\text{FV}_{\text{JC1}} = 1.728,20 \times 1,3401$$

$$\text{FV}_{\text{JC2}} = 1.728,20 \times 1,2763$$

$$\text{FV}_{\text{JC3}} = 1.728,20 \times 1,2155$$

$$\text{FV}_{\text{JC4}} = 1.728,20 \times 1,1576$$

$$\text{FV}_{\text{JC5}} = 1.728,20 \times 1,1025$$

$$\text{FV}_{\text{JC6}} = 1.728,20 \times 1,0500$$

$$\text{FV}_{\text{JC7}} = 1.728,20 \times 1,0000$$

$$\text{FV}_{\text{JCm}} = \text{FV}_{\text{JC1}} + \text{FV}_{\text{JC2}} + \text{FV}_{\text{JC3}} + \text{FV}_{\text{JC4}} + \text{FV}_{\text{JC5}} + \text{FV}_{\text{JC6}} + \text{FV}_{\text{JC7}}$$

$$\text{FV}_{\text{JCm}} = 14.071,00$$

A partir do valor presente, a prestação é calculada pela fórmula:

$$\text{PMT}_{\text{JC}} = \text{PV} \cdot i\% \cdot \frac{(1 + i\%)^n}{(1 + i\%)^n - 1}$$

$$\text{PMT}_{\text{JC}} = 1.728,20$$

A operação inversa é:

$$PV = \frac{PMT_{JC} \cdot (1 + i\%)^n - 1}{i\% \cdot (1 + i\%)^n}$$

$$PV = 10.000,00$$

O valor presente PV_{JC} também pode ser obtido mediante soma do valor presente das prestações descapitalizadas, uma a uma, até o momento zero, a partir de cada ocorrência.

$$PV_{JCm} = \frac{PMT_{JCm}}{(1 + i\%)^m}$$

$$PV_{JC1} = 1.728,20 / 1,05$$

$$PV_{JC2} = 1.728,20 / 1,1025$$

$$PV_{JC3} = 1.728,20 / 1,157625$$

$$PV_{JC4} = 1.728,20 / 1,215506$$

$$PV_{JC5} = 1.728,20 / 1,276282$$

$$PV_{JC6} = 1.728,20 / 1,340096$$

$$PV_{JC7} = 1.728,20 \times 1,4071$$

$$PV_{JCm} = PV_{JC1} + PV_{JC2} + PV_{JC3} + PV_{JC4} + PV_{JC5} + PV_{JC6} + PV_{JC7}$$

$$PV_{JCm} = 10.000,00$$

Sob **juros simples**, conforme visto nos capítulos 12 a 14, **para série uniforme** (mesmo valor, com intervalo regular entre si), com base no valor futuro, a fórmula da prestação é:

$$PMT_{JS} = \frac{FV_{JS}}{[1 + (i\% \cdot \frac{n-1}{2})] \cdot n}$$

$$PMT_{JS} = 1.677,02$$

A operação inversa é:

$$FV_{JS} = PMT_{JS} \cdot \left\{ \left[1 + \frac{i\% \cdot (n - 1)}{2} \right] \cdot n \right\}$$

$$FV_{JS} = 13.500,00$$

O valor futuro FV_{JS} também pode ser obtido mediante soma do valor futuro de cada uma das prestações atualizadas, desde a sua ocorrência até o momento “n”.

$$FV_{JSm} = PMT_{JSm} \cdot \{1 + [i\% \cdot (n - m)]\}$$

$$FV_{JS1} = 1.677,02 \times 1,30$$

$$FV_{JS2} = 1.677,02 \times 1,25$$

$$FV_{JS3} = 1.677,02 \times 1,20$$

$$FV_{JS4} = 1.677,02 \times 1,15$$

$$FV_{JS5} = 1.677,02 \times 1,10$$

$$FV_{JS6} = 1.677,02 \times 1,05$$

$$FV_{JS7} = 1.677,02 \times 1,00$$

$$FV_{JSm} = FV_{JS1} + FV_{JS2} + FV_{JS3} + FV_{JS4} + FV_{JS5} + FV_{JS6} + FV_{JS7}$$

$$FV_{JSm} = 13.500,00$$

A partir do valor presente, a prestação é calculada pela fórmula:

$$PMT_{JS} = \frac{PV \cdot [1 + (i\% \cdot n)]}{\left[1 + \left(i\% \cdot \frac{n-1}{2} \right) \right] \cdot n}$$

$$PMT_{JS} = 1.677,02$$

A operação inversa é:

$$PV = \frac{PMT_{JS} \cdot \left[1 + \left(i\% \cdot \frac{n-1}{2} \right) \right] \cdot n}{1 + (i\% \cdot n)}$$

$$PV_{JS} = 10.000,00$$

O valor presente PV_{JS} também pode ser obtido mediante soma do valor presente das prestações descapitalizadas, uma a uma, até o momento zero, a partir de cada ocorrência.

$$PV_{JSm} = \frac{PMT_{JS} \cdot \{ 1 + [i\% \cdot (m - 1)] \}}{1 + (i\% \cdot n)}$$

$$PV_{JS1} = 1.677,02 \times 1,00 / 1,35$$

$$PV_{JS2} = 1.677,02 \times 1,05 / 1,35$$

$$PV_{JS3} = 1.677,02 \times 1,10 / 1,35$$

$$PV_{JS4} = 1.677,02 \times 1,15 / 1,35$$

$$PV_{JS5} = 1.677,02 \times 1,20 / 1,35$$

$$PV_{JS6} = 1.677,02 \times 1,25 / 1,35$$

$$PV_{JS7} = 1.677,02 \times 1,30 / 1,35$$

$$PV_{JSm} = PV_{JS1} + PV_{JS2} + PV_{JS3} + PV_{JS4} + PV_{JS5} + PV_{JS6} + PV_{JS7}$$

$$PV_{JSm} = 10.000,00$$

Neste caso, em juros simples, é incorreto utilizar a sistemática de cálculo da prestação obtida mediante uso do artifício do suposto “FS = Fator Simples”, retirado da fórmula do Montante ou Valor Futuro a Juros Simples,

$$M \text{ ou } FV = C \text{ ou } PV \cdot [1 + (i \cdot n)].$$

$$FS = 1 / (1 + i \cdot n)$$

A prestação assim apurada é igual à divisão entre o capital inicial e a soma dos “fatores simples” de cada período.

$$\text{PMT} = \text{PV} / \sum \text{FS}$$

$$\text{PMT} = \text{PV} / \sum (1 + i \cdot n_m)$$

$$\text{FS}_1 = 1 / 1,05 = 0,9523810$$

$$\text{FS}_2 = 1 / 1,10 = 0,9090909$$

$$\text{FS}_3 = 1 / 1,15 = 0,8695652$$

$$\text{FS}_4 = 1 / 1,20 = 0,8333333$$

$$\text{FS}_5 = 1 / 1,25 = 0,8000000$$

$$\text{FS}_6 = 1 / 1,30 = 0,7692308$$

$$\text{FS}_7 = 1 / 1,35 = 0,7407407$$

$$\text{PMT} = 10.000,00 / 5,8743419$$

$$\text{PMT} = 1.702,32$$

O valor da prestação assim obtido, embora conduza ao exato valor presente, no momento zero, mediante operação inversa

$$\text{PV}_{\text{Jsm}} = \frac{\text{PMT}_{\text{Js}}}{\sum (1 + i \cdot n_m)}$$

$$\text{PV}_{\text{FS1}} = 1.702,32 / 1,05 = 1.621,26$$

$$\text{PV}_{\text{FS2}} = 1.702,32 / 1,10 = 1.547,56$$

$$\text{PV}_{\text{FS3}} = 1.702,32 / 1,15 = 1.480,28$$

$$\text{PV}_{\text{FS4}} = 1.702,32 / 1,20 = 1.418,60$$

$$\text{PV}_{\text{FS5}} = 1.702,32 / 1,25 = 1.361,85$$

$$\text{PV}_{\text{FS6}} = 1.702,32 / 1,30 = 1.309,48$$

$$\text{PV}_{\text{FS7}} = 1.702,32 / 1,35 = 1.260,98$$

$$\text{PV}_{\text{FS}} = 10.000,00$$

é maior do que o necessário para preencher à condição de atingir o exato valor futuro no momento “n”, mediante construção de um plano de financiamento, com base nos parâmetros iniciais.

$$FV_{JSm} = PMT_{Js} \cdot \sum \{1 + [i \% \cdot (n - m)]\}$$

$$FV_{FS1} = 1.702,32 \times 1,30 = 2.213,01$$

$$FV_{FS2} = 1.702,32 \times 1,25 = 2.127,90$$

$$FV_{FS3} = 1.702,32 \times 1,20 = 2.042,78$$

$$FV_{FS4} = 1.702,32 \times 1,15 = 1.957,67$$

$$FV_{FS5} = 1.702,32 \times 1,10 = 1.872,55$$

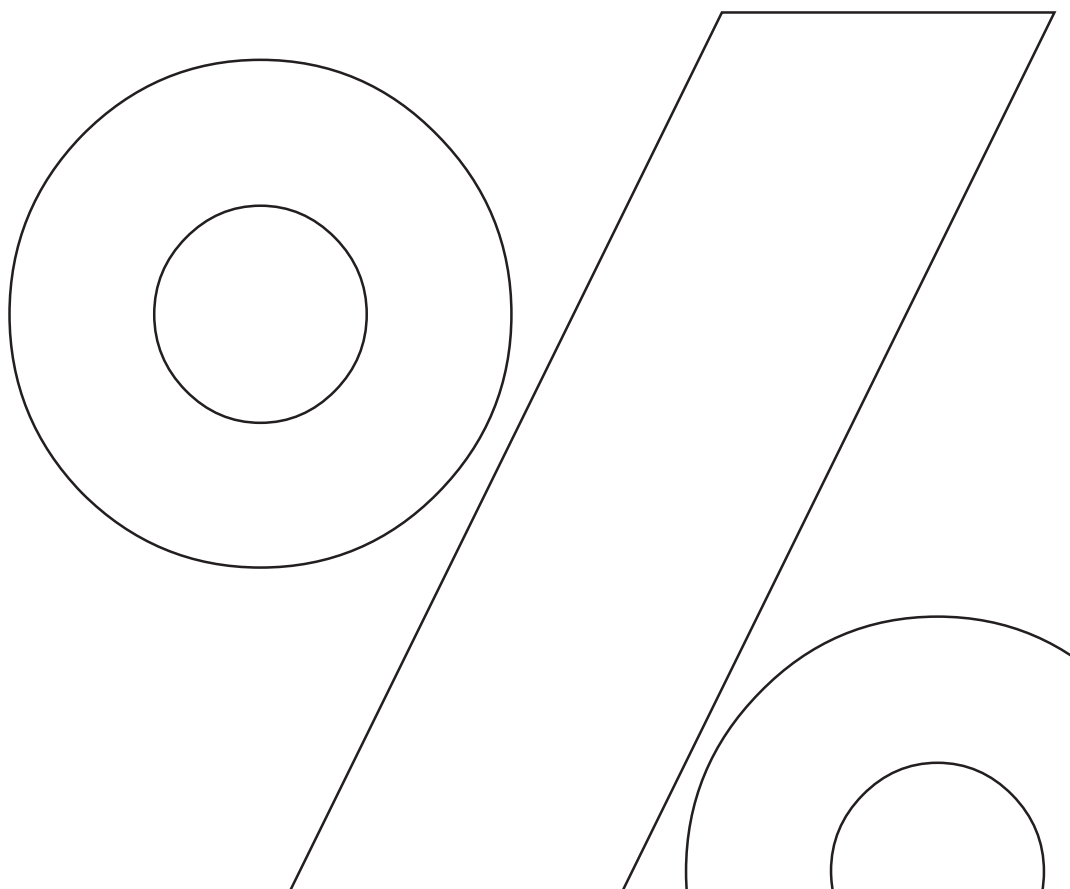
$$FV_{FS6} = 1.702,32 \times 1,05 = 1.787,43$$

$$FV_{FS7} = 1.702,32 \times 1,00 = 1.702,32$$

$$FV_{FS} = 13.703,66$$

CAPÍTULO 23

MÉTODO DE QUITACÃO A JUROS COMPOSTOS (MQJC)



MÉTODO DE QUITAÇÃO A JUROS COMPOSTOS (MQJC)

Cabe relembrar a cláusula pétrea da Matemática Financeira, de que dois ou mais valores, só e exclusivamente, são iguais entre si, se tiverem o mesmo valor nominal e se referirem à mesma data focal.

Assim, em cada momento, através do encontro de contas, cotejo entre entradas e saídas, é possível apurar o valor das cotas de juros e as de amortização contidas em cada prestação, e, por consequência, os saldos devedores intermediários, entre o instante zero e o instante “n”.

Nos capítulos anteriores, considerado o prazo integral contratado, foi possível construir os planos de financiamento para amortização de financiamentos, tanto a juros compostos como a juros simples.

Conforme os respectivos modelos matemáticos das PGs e PAs, comprovou-se que a razão de crescimento oferece uniformidade de evolução às cotas de juros e de amortização contidas em cada prestação.

Com base nestas duas verbas é que se apura os saldos devedores nominais, através da diferença entre o saldo devedor anterior e a cota de amortização contida em cada prestação, no momento respectivo.

Sob outro prisma, o da equivalência dos fluxos de caixa, os valores das prestações apurados se mantêm inalterados, comprovando a sua perfeição.

Mas, para ser efetivo, real, cada saldo devedor parcial deve resultar da diferença entre o valor principal atualizado pela taxa de juros até o período em análise e a soma das prestações ocorridas até então, também atualizadas pela taxa de juros.

No exemplo retro utilizado, $PV = R\$ 10.000,00$, $n = 7$, $i\% = 5\%$, sob juros compostos, $PMT = R\$ 1.728,20$; ao final do período 1, o saldo devedor equivale a

$$SD_1 = 10.000,00 \times (1+5\%)^1 - 1.728,20 \times (1+5\%)^0 = 10.500,00 - 1.728,20$$

$$SD_1 = 8.771,80$$

Ao final do período 2, o saldo devedor equivale a

$$SD_2 = 10.000,00 \times (1+5\%)^2 - 1.728,20 \times (1+5\%)^1 - 1.728,20 \times (1+5\%)^0$$

$$SD_2 = 11.025,00 - 1.814,61 - 1.728,20$$

$$SD_2 = 7.482,19$$

E assim por diante:

$$SD_3 = 11.576,25 - 1.905,34 - 1.814,61 - 1.728,20 = 6.128,11$$

$$SD_4 = 12.155,06 - 2.000,61 - 1.905,34 - 1.814,61 - 1.728,20 = 4.706,31$$

$$SD_5 = 12.762,82 - 2.100,64 - 2.000,61 - 1.905,34 - 1.814,61 - 1.728,20 = 3.213,43$$

$$SD_6 = 13.400,96 - 2.205,67 - 2.100,64 - 2.000,61 - 1.905,34 - 1.814,61 - 1.728,20 = 1.645,90$$

$$SD_7 = 14.071,00 - 2.315,95 - 2.205,67 - 2.100,64 - 2.000,61 - 1.905,34 - 1.814,61 - 1.728,20 = 0,00$$

PRESTAÇÃO	0	1	2	3	4	5	6	7
ATUALIZAÇÃO 0		1.728,20	1.728,20	1.728,20	1.728,20	1.728,20	1.728,20	1.728,20
ATUALIZAÇÃO 1			1.814,61	1.814,61	1.814,61	1.814,61	1.814,61	1.814,61
ATUALIZAÇÃO 2				1.905,34	1.905,34	1.905,34	1.905,34	1.905,34
ATUALIZAÇÃO 3					2.000,61	2.000,61	2.000,61	2.000,61
ATUALIZAÇÃO 4						2.100,64	2.100,64	2.100,64
ATUALIZAÇÃO 5							2.205,67	2.205,67
ATUALIZAÇÃO 6								2.315,95
SOMA		1.728,20	3.542,81	5.448,14	7.448,75	9.549,39	11.755,05	14.071,00
PRINCIPAL ATUALIZADO	10.000,00	10.500,00	11.025,00	11.576,25	12.155,06	12.762,82	13.400,96	14.071,00
SALDO DEVEDOR	10.000,00	8.771,80	7.482,19	6.128,11	4.706,31	3.213,43	1.645,90	-

A diferença entre os saldos devedores expressa a cota de amortização contida em cada prestação. Por conseguinte, a cota de juros é a diferença entre o valor da prestação (R\$ 1.728,20) e a cota de amortização.

$$SD_0 - SD_1 = 1.228,20 = A_1$$

$$J_1 = PMT - A_1 = 500,00$$

$$SD_1 - SD_2 = 1.289,61 = A_2$$

$$J_2 = PMT - A_2 = 438,59$$

$$SD_2 - SD_3 = 1.354,09 = A_3$$

$$J_3 = PMT - A_3 = 374,11$$

$$SD_3 - SD_4 = 1.421,79 = A_4$$

$$J_4 = PMT - A_4 = 306,41$$

$$SD_4 - SD_5 = 1.492,88 = A_5$$

$$J_5 = PMT - A_5 = 235,32$$

$$SD_5 - SD_6 = 1.567,53 = A_6$$

$$J_6 = PMT - A_6 = 160,67$$

$$SD_6 - SD_7 = 1.645,90 = A_7$$

$$J_7 = PMT - A_7 = 82,30$$

Do desenvolvimento algébrico retro apresentado, na forma composta, foi possível deduzir a fórmula dos juros em cada um dos períodos, que se constitui em algoritmo de fácil aplicação:

$$J_n = PV \cdot i\% \cdot (1 + i\%)^{n-1} - PMT \cdot [(1 + i\%)^{n-1} - 1]$$

Em assim sendo:

$$J_1 = 10.000,00 \times 5\% \times (1 + 5\%)^{1-1} - 1.728,20 \times [(1+5\%)^{1-1} - 1]$$

$$J_1 = 500,00 \times (1,05)^0 - 1.728,20 \times [(1,05)^0 - 1]$$

$$J_1 = 500,00 \times 1 - 1.728,20 \times [1 - 1] = 500,00 - 1.728,20 \times 0 = 500,00 - 0,00$$

$$J_1 = 500,00$$

$$A_1 = PMT - J_1 = 1.728,20 - 500,00 = 1.228,20$$

$$SD_1 = SD_0 - A_1 = 10.000,00 - 1.228,20 = 8.771,80$$

$$J_2 = 10.000,00 \times 5\% \times (1 + 5\%)^{2-1} - 1.728,20 \times [(1+5\%)^{2-1} - 1]$$

$$J_2 = 500,00 \times (1,05)^1 - 1.728,20 \times [(1,05)^1 - 1]$$

$$J_2 = 500,00 \times 1,05 - 1.728,20 \times [1,05 - 1] = 525,00 - 1.728,20 \times 0,05$$

$$J_2 = 525,00 - 86,41$$

$$J_2 = 438,59$$

$$A_2 = PMT - J_2 = 1.728,20 - 438,59 = 1.289,61$$

$$SD_2 = SD_1 - A_2 = 8.771,80 - 1.289,61 = 7.482,19$$

$$J_3 = 10.000,00 \times 5\% \times (1 + 5\%)^{3-1} - 1.728,20 \times [(1+5\%)^{3-1} - 1]$$

$$J_3 = 500,00 \times (1,05)^2 - 1.728,20 \times [(1,05)^2 - 1]$$

$$J_3 = 500,00 \times 1,1025 - 1.728,20 \times [1,1025 - 1] = 551,25 - 1.728,20 \times 0,1025$$

$$J_3 = 551,25 - 177,14$$

$$J_3 = 374,11$$

$$A_3 = PMT - J_3 = 1.728,20 - 374,11 = 1.354,09$$

$$SD_3 = SD_2 - A_3 = 7.482,19 - 1.354,09 = 6.128,10$$

$$J_4 = 10.000,00 \times 5\% \times (1 + 5\%)^{4-1} - 1.728,20 \times [(1+5\%)^{4-1} - 1]$$

$$J_4 = 500,00 \times (1,05)^3 - 1.728,20 \times [(1,05)^3 - 1]$$

$$J_4 = 500,00 \times 1,1576 - 1.728,20 \times [1,1576 - 1] = 578,82 - 1.728,20 \times 0,1576$$

$$J_4 = 578,81 - 272,41$$

$$J_4 = 306,41$$

$$A_4 = \text{PMT} - J_4 = 1.728,20 - 306,41 = 1.421,79$$

$$SD_4 = SD_3 - A_4 = 6.128,10 - 1.421,79 = 4.706,31$$

$$J_5 = 10.000,00 \times 5\% \times (1 + 5\%)^{5-1} - 1.728,20 \times [(1+5\%)^{5-1} - 1]$$

$$J_5 = 500,00 \times (1,05)^4 - 1.728,20 \times [(1,05)^4 - 1]$$

$$J_5 = 500,00 \times 1,2155 - 1.728,20 \times [1,2155 - 1] = 607,76 - 1.728,20 \times 0,2155 \\ = 607,76 - 372,44$$

$$J_5 = 235,32$$

$$A_5 = \text{PMT} - J_5 = 1.728,20 - 235,32 = 1.492,88$$

$$SD_5 = SD_4 - A_5 = 4.706,31 - 1.492,88 = 3.213,43$$

$$J_6 = 10.000,00 \times 5\% \times (1 + 5\%)^{6-1} - 1.728,20 \times [(1+5\%)^{6-1} - 1]$$

$$J_6 = 500,00 \times (1,05)^5 - 1.728,20 \times [(1,05)^5 - 1]$$

$$J_6 = 500,00 \times 1,2762 - 1.728,20 \times [1,2762 - 1] = 638,14 - 1.728,20 \times 0,2762 \\ = 638,14 - 477,47$$

$$J_6 = 160,67$$

$$A_6 = \text{PMT} - J_6 = 1.728,20 - 160,67 = 1.567,53$$

$$SD_6 = SD_5 - A_6 = 3.213,43 - 1.567,53 = 1.645,90$$

$$J_7 = 10.000,00 \times 5\% \times (1 + 5\%)^{7-1} - 1.728,20 \times [(1+5\%)^{7-1} - 1]$$

$$J_7 = 500,00 \times (1,05)^6 - 1.728,20 \times [(1,05)^6 - 1]$$

$$J_7 = 500,00 \times 1,3401 - 1.728,20 \times [1,3401 - 1] = 670,05 - 1.728,20 \times 0,1025$$

$$J_7 = 670,05 - 587,75$$

$$J_7 = 82,30$$

$$A_7 = PMT - J_7 = 1.728,20 - 82,30 = 1.645,90$$

$$SD_7 = SD_6 - A_7 = 1.645,90 - 1.645,90 = 0,00$$

MOMENTO	PRESTAÇÃO PERIÓDICA	JURO NA PRESTAÇÃO	AMORTIZAÇÃO NA PRESTAÇÃO	SALDO DEVEDOR RESIDUAL
0				10.000,00
1	1.728,20	500,00	1.228,20	8.771,80
2	1.728,20	438,59	1.289,61	7.482,19
3	1.728,20	374,11	1.354,09	6.128,10
4	1.728,20	306,41	1.421,79	4.706,31
5	1.728,20	235,32	1.492,88	3.213,43
6	1.728,20	160,67	1.567,53	1.645,90
7	1.728,20	82,30	1.645,90	-

Constata-se, assim, que, sob a sistemática de juros compostos, além da prestação de R\$ 1.728,20 ser perfeita para a quitação do empréstimo, há, também, exata correspondência dos saldos devedores apurados tanto pelas progressões geométricas como pela equivalência de fluxos de caixa, nada sendo alterado também nas cotas de juro e de amortização contidas em cada prestação.

Por óbvio, os demais sistemas de amortização que, ao final do prazo total, capitalizam juros na mesma intensidade que o CJC (SAC-JC, SAM e SAA), tal como visto anteriormente, apresentam saldos devedores nominais em suas respectivas evoluções.

Para que sejam reais, efetivos, os saldos desses sistemas devem ser recalculados em cada período do prazo considerado, da mesma forma ora verificada, mediante equivalência de fluxos de caixa na forma composta.

SAC-JC – SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE A JUROS COMPOSTOS

NUM PARC	0	1	2	3	4	5	6	7
PRESTAÇÃO 0		1.928,57	1.857,14	1.785,71	1.714,29	1.642,86	1.571,43	1.500,00
PRESTAÇÃO 1			2.025,00	1.950,00	1.875,00	1.800,00	1.725,00	1.650,00
PRESTAÇÃO 2				2.126,25	2.047,50	1.968,75	1.890,00	1.811,25
PRESTAÇÃO 3					2.232,56	2.149,88	2.067,19	1.984,50
PRESTAÇÃO 4						2.344,19	2.257,37	2.170,55
PRESTAÇÃO 5							2.461,40	2.370,24
PRESTAÇÃO 6								2.584,47
SOMA		1.928,57	3.882,14	5.861,96	7.869,35	9.905,67	11.972,38	14.071,00
PRINCIPAL ATUALIZADO	10.000,00	10.500,00	11.025,00	11.576,25	12.155,06	12.762,82	13.400,96	14.071,00
SALDO DEVEDOR EFETIVO	10.000,00	8.571,43	7.142,86	5.714,29	4.285,71	2.857,14	1.428,57	-
SALDO DEVEDOR NOMINAL	10.000,00	8.571,43	7.142,86	5.714,29	4.285,71	2.857,14	1.428,57	(0,00)
DIFERENÇA	-	-	-	-	-	-	-	0,00

SAM – SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO MISTO

NUM PARC	0	1	2	3	4	5	6	7
PRESTAÇÃO 0		1.828,38	1.792,67	1.756,96	1.721,24	1.685,53	1.649,81	1.614,10
PRESTAÇÃO 1			1.919,80	1.882,30	1.844,80	1.807,30	1.769,80	1.732,30
PRESTAÇÃO 2				2.015,79	1.976,42	1.937,04	1.897,67	1.858,29
PRESTAÇÃO 3					2.116,58	2.075,24	2.033,90	1.992,55
PRESTAÇÃO 4						2.222,41	2.179,00	2.135,59
PRESTAÇÃO 5							2.333,53	2.287,95
PRESTAÇÃO 6								2.450,21
SOMA		1.828,38	3.712,47	5.655,05	7.659,05	9.727,53	11.863,72	14.071,00
PRINCIPAL ATUALIZADO	10.000,00	10.500,00	11.025,00	11.576,25	12.155,06	12.762,82	13.400,96	14.071,00
SALDO DEVEDOR EFETIVO	10.000,00	8.671,62	7.312,53	5.921,20	4.496,01	3.035,29	1.537,24	-
SALDO DEVEDOR NOMINAL	10.000,00	8.671,62	7.312,53	5.921,20	4.496,01	3.035,29	1.537,24	0,00
DIFERENÇA	-	-	-	-	-	-	-	0,00

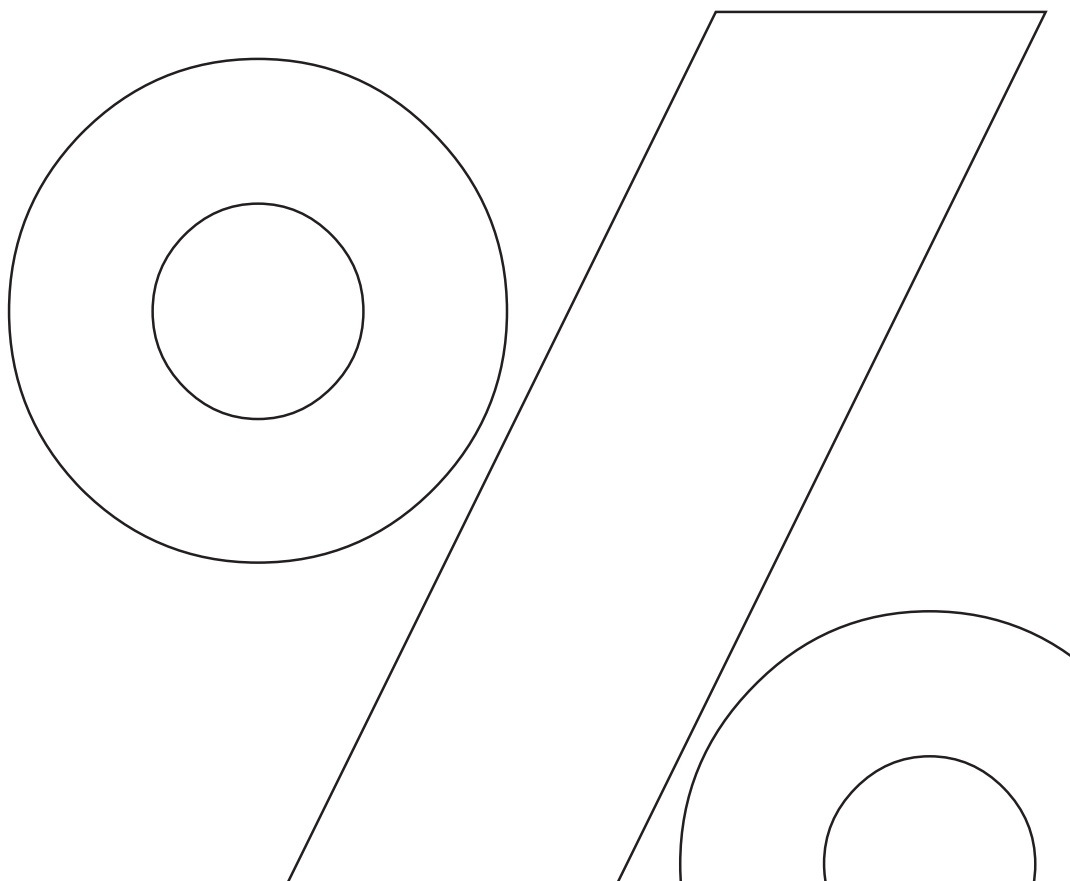
SAC-JC – SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO AMERICANO

NUM PARC	0	1	2	3	4	5	6	7
PRESTAÇÃO 0		500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	10.500,00
PRESTAÇÃO 1			525,00	525,00	525,00	525,00	525,00	525,00
PRESTAÇÃO 2				551,25	551,25	551,25	551,25	551,25
PRESTAÇÃO 3					578,81	578,81	578,81	578,81
PRESTAÇÃO 4						607,75	607,75	607,75
PRESTAÇÃO 5							638,14	638,14
PRESTAÇÃO 6								670,05
SOMA		500,00	1.025,00	1.576,25	2.155,06	2.762,82	3.400,96	14.071,00
PRINCIPAL ATUALIZADO	10.000,00	10.500,00	11.025,00	11.576,25	12.155,06	12.762,82	13.400,96	14.071,00
SALDO DEVEDOR EFETIVO	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	-
SALDO DEVEDOR NOMINAL	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	-
DIFERENÇA	-	-	-	-	-	-	-	-

Constata-se, assim, que, sob a sistemática de juros compostos, para os 3 métodos, SAC-JC, SAM E SAA, há exata correspondência dos saldos devedores apurados tanto pela concepção original de cada um como pela equivalência de fluxos de caixa.

CAPÍTULO 24

MÉTODO SIMPLEX OU DE QUITAÇÃO A JUROS SIMPLES (MQJS)



MÉTODO SIMPLEX OU DE QUITAÇÃO A JUROS SIMPLES (MQJS)

Conforme antes visto, os saldos apurados pelas PAs, são saldos nominais, não reais, pois resultam de operações matemáticas de verbas que se encontram em momentos diferentes.

Sob o prisma de que dois ou mais valores, só e exclusivamente, são iguais entre si se tiverem o mesmo valor nominal e se referirem à mesma data focal, em cada momento, a juros simples, através do encontro de contas, cotejo entre entradas e saídas, é possível apurar o valor das cotas de juros e as de amortização contidas em cada prestação, e, por consequência, os saldos devedores intermediários, entre o instante zero e o instante “n”.

O pagamento parcelado sob juros simples é cabível quando a legislação específica assim dispuser (por exemplo, contratos de mútuo em que o credor não seja instituição financeira fiscalizada pelo Banco Central do Brasil) ou nos casos em que decisão judicial assim determinar (por exemplo, expurgo de capitalização composta e recálculo por capitalização simples).

Assim é que o autor desta obra desenvolveu o **SIMPLEX ou MQJS – MÉTODO DE QUITAÇÃO A JUROS SIMPLES**.

O SIMPLEX permite que se encontre valores ideais em situações em que diversos aspectos precisam ser respeitados.

Então, por equivalência de fluxos de caixa, $PV = R\$10.000,00$, $n = 7$, $i\% = 5\%$, $PMT = R\$1.677,02$; ao final do período 1, o saldo devedor a JUROS SIMPLES é

$$SD_1 = 10.000,00 \times [1 + (5\% \times 1)] - 1.677,02 \times [1 + (5\% \times 0)] = 10.500,00 - 1.677,02$$

$$SD_1 = 8.822,98$$

Ao final do período 2, o saldo devedor equivale a

$$SD_2 = 10.000,00 \times [1 + (5\% \times 2)] - 1.677,02 \times [1 + (5\% \times 1)] - 1.677,02 \times [1 + (5\% \times 0)]$$

$$SD_2 = 11.000,00 - 1.760,87 - 1.677,02$$

$$SD_2 = 7.562,11$$

E assim por diante:

$$SD_3 = 11.500,00 - 1.844,72 - 1.760,87 - 1.677,02 = 6.217,39$$

$$SD_4 = 12.000,00 - 1.928,57 - 1.844,72 - 1.760,87 - 1.677,02 = 4.788,82$$

$$SD_5 = 12.500,00 - 2.012,42 - 1.928,57 - 1.844,72 - 1.760,87 - 1.677,02 = 3.276,40$$

$$SD_6 = 13.000,00 - 2.096,28 - 2.012,42 - 1.928,57 - 1.844,72 - 1.760,87 - 1.677,02 = 1.680,12$$

$$SD_7 = 13.500,00 - 2.180,13 - 2.096,28 - 2.012,42 - 1.928,57 - 1.844,72 - 1.760,87 - 1.677,02 = 0,00$$

PRESTAÇÃO	0	1	2	3	4	5	6	7
ATUALIZAÇÃO 0		1.677,02	1.677,02	1.677,02	1.677,02	1.677,02	1.677,02	1.677,02
ATUALIZAÇÃO 1			1.760,87	1.760,87	1.760,87	1.760,87	1.760,87	1.760,87
ATUALIZAÇÃO 2				1.844,72	1.844,72	1.844,72	1.844,72	1.844,72
ATUALIZAÇÃO 3					1.928,57	1.928,57	1.928,57	1.928,57
ATUALIZAÇÃO 4						2.012,42	2.012,42	2.012,42
ATUALIZAÇÃO 5							2.096,28	2.096,28
ATUALIZAÇÃO 6								2.180,13
SOMA		1.677,02	3.437,89	5.282,61	7.211,19	9.223,61	11.319,89	13.500,00
PRINCIPAL ATUALIZADO	10.000,00	10.500,00	11.000,00	11.500,00	12.000,00	12.500,00	13.000,00	13.500,00
SALDO DEVEDOR	10.000,00	8.822,98	7.562,11	6.217,39	4.788,81	3.276,39	1.680,12	(0,00)

A cota de amortização contida em cada prestação resulta da diferença entre os saldos devedores, assim como a diferença entre a prestação e cota de amortização resulta na cota de juros.

$$SD_0 - SD_1 = 1.177,02 = A_1$$

$$J_1 = PMT' - A_1 = 500,00$$

$$SD_1 - SD_2 = 1.260,87 = A_2$$

$$J_2 = PMT' - A_2 = 416,15$$

$$SD_2 - SD_3 = 1.344,72 = A_3$$

$$J_3 = PMT' - A_3 = 332,30$$

$$SD_3 - SD_4 = 1.428,57 = A_4$$

$$J_4 = PMT' - A_4 = 248,45$$

$$SD_4 - SD_5 = 1.512,42 = A_5$$

$$J_5 = PMT' - A_5 = 164,60$$

$$SD_5 - SD_6 = 1.596,27 = A_6$$

$$J_6 = PMT' - A_6 = 80,75$$

$$SD_6 - SD_7 = 1.680,12 = A_7$$

$$J_7 = PMT' - A_7 = -3,11$$

Do desenvolvimento algébrico retro apresentado, na forma simples, também foi possível deduzir a fórmula dos juros em cada um dos períodos, que igualmente se constitui em algoritmo de fácil aplicação:

$$J_n = i\% \cdot (PV - \sum PMT_{1 \rightarrow n-1})$$

ou

$$J_n = i\% \cdot (SD_{n-1} - \sum J_{1 \rightarrow n-1})$$

Em assim sendo:

$$J_1 = 5\% \times [10.000,00 - 1.677,02 (1 - 1)] = 5\% \times 10.000,00 = 500,00$$

$$A_1 = PMT - J_1 = 1.677,02 - 500,00 = 1.177,02$$

$$SD_1 = SD_0 - A_1 = 10.000,00 - 1.177,02 = 8.822,98$$

$$J_2 = 5\% \times [10.000,00 - 1.677,02 (2 - 1)] = 5\% \times (10.000,00 - 1.677,02)$$

$$J_2 = 5\% \times 8.322,98 = 416,15$$

$$A_2 = PMT - J_2 = 1.677,02 - 416,15 = 1.260,87$$

$$SD_2 = SD_1 - A_2 = 8.822,98 - 1.260,87 = 7.562,11$$

$$J_3 = 5\% \times [10.000,00 - 1.677,02 (3 - 1)] = 5\% \times (10.000,00 - 3.354,04)$$

$$J_3 = 5\% \times 6.645,96 = 332,30$$

$$A_3 = PMT - J_3 = 1.677,02 - 332,30 = 1.344,72$$

$$SD_3 = SD_2 - A_3 = 7.562,11 - 1.344,72 = 6.217,39$$

$$J_4 = 5\% \times [10.000,00 - 1.677,02 (4 - 1)] = 5\% \times (10.000,00 - 5.031,06)$$

$$J_4 = 5\% \times 4.968,94 = 248,45$$

$$A_4 = PMT - J_4 = 1.677,02 - 248,45 = 1.428,57$$

$$SD_4 = SD_3 - A_4 = 6.217,39 - 1.428,57 = 4.788,82$$

$$J_5 = 5\% \times [10.000,00 - 1.677,02 (5-1)] = 5\% \times (10.000,00 - 6.708,08)$$

$$J_5 = 5\% \times 3.291,92 = 164,60$$

$$A_5 = PMT - J_5 = 1.677,02 - 164,60 = 1.512,42$$

$$SD_5 = SD_4 - A_5 = 4.788,82 - 1.512,42 = 3.276,40$$

$$J_6 = 5\% \times [10.000,00 - 1.677,02 (6-1)] = 5\% \times (10.000,00 - 8.385,10)$$

$$J_6 = 5\% \times 1.614,90 = 80,75$$

$$A_6 = PMT - J_6 = 1.677,02 - 80,75 = 1.596,27$$

$$SD_6 = SD_5 - A_6 = 3.276,40 - 1.596,27 = 1.680,12$$

$$J_7 = 5\% \times [10.000,00 - 1.677,02 (7-1)] = 5\% \times (10.000,00 - 10.062,12)$$

$$J_7 = 5\% \times -62,12 = -3,11$$

$$A_7 = PMT - J_7 = 1.677,02 - -3,11 = 1.680,12$$

$$SD_7 = SD_6 - A_7 = 1.680,12 - 1.680,12 = 0,00$$

Num	VP acumulado de 0 a m	PMT	$\sum$ PMT de 1 a m	PV - $\sum$ PMT de 1 a m-1	JS = (i% . PV - $\sum$ PMT de 1 a m-1)	JS = (i% . SDm- 1 - $\sum$ J de 1 a m-1)	Juros simples acu-mulados	Amor- tização em "m"	Saldo devedor em "m"
0	10.000,00			10.000,00					10.000,00
1	10.500,00	1.677,02	1.677,02	8.322,98	500,00	500,00	500,00	1.177,02	8.822,98
2	11.000,00	1.677,02	3.354,04	6.645,96	416,15	416,15	916,15	1.260,87	7.562,11
3	11.500,00	1.677,02	5.031,06	4.968,94	332,30	332,30	1.248,45	1.344,72	6.217,39
4	12.000,00	1.677,02	6.708,07	3.291,93	248,45	248,45	1.496,89	1.428,57	4.788,82
5	12.500,00	1.677,02	8.385,09	1.614,91	164,60	164,60	1.661,49	1.512,42	3.276,40
6	13.000,00	1.677,02	10.062,11	- 62,11	80,75	80,75	1.742,24	1.596,27	1.680,12
7	13.500,00	1.677,02	11.739,13	-	3,11	- 3,11	1.739,13	1.680,12	- 0,00

Portanto, exceto nos momentos inicial e final, não há correspondência entre os saldos devedores apurados pelas progressões aritméticas e pela equivalência de fluxos de caixa. O segundo método SIMPLEX ou MQJS, apresenta saldos devedores parciais ligeiramente maiores. Também se alteram os valores das cotas de juro e de amortização contidas em cada prestação.

Momento	Saldo devedor MQJS	Saldo devedor por Gauss	Diferença
0	10.000,00	10.000,00	-
1	8.822,98	8.757,76	65,22
2	7.562,11	7.453,42	108,70
3	6.217,39	6.086,96	130,43
4	4.788,82	4.658,39	130,43
5	3.276,40	3.167,70	108,70
6	1.680,12	1.614,91	65,22
7	- 0,00	0,00	- 0,00

Importante notar que esta forma alternativa de calcular os saldos devedores intermediários, por juros simples, atende ao requisito dos tantos que exigem que a cota dos juros contida na primeira prestação seja exatamente igual ao produto entre a taxa de juros e o valor presente.

Neste caso, $10.000,00 \times 5\% = 500,00$.

Constata-se, assim, que, **mesmo que se alterem as cotas de juro e de amortização contidas em cada prestação, com repercussão nos saldos devedores**, pelas duas formas, sob a sistemática de juros simples, a prestação de R\$ 1.677,02 também é perfeita para a quitação do empréstimo, e isto é o que verdadeiramente importa.

O cálculo dos saldos devedores, além das cotas de juro e de amortização em cada prestação, pela equivalência de fluxos de caixa, por juros simples, é mais adequado ao princípio de que, em Matemática Financeira, para poderem ser comparados, todos os valores devem estar ajustados para a mesma data ou momento.

Considerações sobre o SIMPLEX ou MQJS - Método de Quitação a Juros Simples

O fundamento técnico do SIMPLEX ou MQJS é a aplicação da cláusula pétrea da Matemática Financeira: “dois ou mais valores somente podem ser comparados em um mesmo momento”.

Se, no instante final de um prazo de financiamento, houver a equivalência dos valores em análise, comprova-se a regularidade e a exatidão do cálculo.

Assim, no exemplo padrão deste livro, em 7 períodos, à taxa de juros de 5% ao período, a juros compostos, capitalização a cada período, a partir do valor presente $PV = R\$ 10.000,00$, o valor futuro é $FV_{JC} = R\$ 14.071,00$. A prestação que quita este financiamento é $PMT_{JC} = R\$ 1.728,20$.

A juros simples, $FV_{JS} = R\$ 13.500,00$, prestação $PMT_{JS} = R\$ 1.677,02$.

Comprova-se a exatidão da sistemática JQS – “Juro que é simples!” mediante cotejo, em cada período ou instante “n”, entre FV e soma das PMT atualizadas.

Esta é a essência do SIMPLEX ou MQJS.

Os princípios sempre devem prevalecer.

O resto é detalhe.

O que importa é o valor da prestação, desde que seja exatamente aquele que quita o financiamento, ao final do momento “n”, sendo irrelevantes os valores das cotas de amortização e de principal / amortização contidas em cada prestação.

Somente isto já seria suficiente para demonstrar a validade da sistemática de cálculo.

Admitindo-se que pode ser necessário apurar os saldos devedores intermediários, em cada período, para a hipótese de quitação antecipada do financiamento, à guisa de esclarecimento e persuasão, cabem considerações sobre a dicotomização das prestações periódicas em cotas de juros e cotas de amortização ou parte do principal.

Entre os momentos “1” e “n-1”, sob a ótica da equivalência dos fluxos de caixa, o MQJS aponta valores de saldos devedores intermediários maiores do que os obtidos pelo método que se vale das progressões aritméticas.

Em cada período “m”, aplicada a taxa de juros contratada, capitalização periódica simples, o saldo devedor resulta do confronto (subtração) entre o valor presente acumulado de “0” até “m” e a soma das prestações ocorridas de “1” até “m”.

A diferença entre dois saldos devedores consecutivos (0, 1, 2, 3, ..., n-1, n) expressa o valor amortizado entre um período e o seguinte.

Conforme o prazo e a taxa de juros aplicada, em muitos períodos, a soma atualizada das parcelas mensais fixas a juros simples não será suficiente para pagar os juros acumulados sobre o valor presente. Os saldos devedores intermediários nos períodos iniciais poderão ser crescentes, resultando em cotas de amortização negativas.

Cabe lembrar que, se cada prestação contém juros e principal / amortização, o valor da cota de juros resulta da diferença entre a prestação fixa e cada cota de amortização (obtida da subtração entre os saldos devedores, atual e anterior).

Da mesma forma, poderá haver juros negativos, a partir de um determinado momento do prazo do financiamento, nos casos em que a soma das prestações em cada momento de “1” a “m” for maior do que o valor presente acumulado de “0” a “m”.

Em um financiamento a juros compostos, em 420 meses (35 anos), à taxa de juros de 5% ao período, a partir do valor presente $PV = R\$ 10.000,00$, o valor futuro é $FV_{JC} = R\$ 7.934.245.046.301,95$. A prestação que quita este financiamento é $PMT'_{JC} = R\$ 500,00$.

Mediante capitalização anual de juros, $FV_{CA} = R\$ 139.379.657.490,82$. $PMT'_{CA} = R\$ 392,16$.

A juros simples, $FV_{JS} = R\$ 220.000,00$. $PMT'_{JS} = R\$ 45,65$.

No momento 1, o valor presente acumulado dos juros proporcionais passa a ser de $VP_{(0 \rightarrow 1)} = R\$ 10.500,00$. A subtração entre este valor e a $PMT'_1 = R\$ 45,65$ resulta em $SD_1 = R\$ 10.454,35$. A prestação PMT'_1 se compõe de $J_1 = R\$ 500,00$ e $A_1 = R\$ (-) 454,35$.

No momento 200, $VP_{(0 \rightarrow 200)} = R\$ 110.000,00$, $PMT'_{(1 \rightarrow 200)} = R\$ 54.049,38$; $SD_{200} = R\$ 55.450,77$; $J_{200} = R\$ 45,80$; $A_{200} = R\$ (-) 0,16$.

No momento 201, $VP_{(0 \rightarrow 201)} = R\$ 110.500,00$, $PMT'_{(1 \rightarrow 201)} = R\$ 55.051,35$; $SD_{201} = R\$ 55.448,65$; $J_{201} = R\$ 43,52$; $A_{201} = R\$ 2,13$, a primeira amortização positiva.

No momento 221, $VP_{(0 \rightarrow 221)} = R\$ 120.500,00$, $PMT'_{(1 \rightarrow 221)} = R\$ 65.573,19$; $SD_{221} = R\$ 54.926,81$; $J_{221} = R\$ (-) 2,13$, o primeiro juro negativo; $A_{221} = R\$ 47,77$.

No momento 419, $VP_{(0 \rightarrow 419)} = R\$ 219.500,00$, $PMT'_{(1 \rightarrow 419)} = R\$ 218.998,03$; $SD_{419} = R\$ 501,97$; $J_{419} = R\$ (-) 454,04$; $A_{419} = R\$ 499,69$.

No momento 420, $VP_{(0 \rightarrow 420)} = R\$ 220.000,00$, $PMT'_{(1 \rightarrow 420)} = R\$ 220.000,00$; $SD_{420} = R\$ 0,00$; $J_{420} = R\$ (-) 456,32$; $A_{420} = R\$ 501,97$.

Este é ponto em que se demonstra a exatidão dos cálculos, pois, depois de cada saldo devedor intermediário resultar da diferença entre o valor presente acumulado entre “0” e “m” e a soma das prestações também acumuladas entre “1” e “m”, o saldo devedor final é zero!

Conforme se observa, a juros simples, esta suposta ou alegada “necessidade” de separar a prestação fixa em cotas de juros e de amortização redundam em aparentes incongruências, mas o sistema é perfeito sob o ponto de vista da cláusula pétrea da Matemática Financeira, de que os valores somente poderão ser confrontados se estiverem transportados para um mesmo momento, sob a incidência da mesma taxa de juros.

SACJS – SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE A JUROS SIMPLES

Já se viu que o SAC-JS é o único sistema de amortização que se equipara à CJS – Capitalização por Juros Simples, no momento “n”, pois a soma do valor atualizado das prestações é 2.200,00.

Os saldos devedores intermediários obtidos pela metodologia original são saldos devedores nominais.

Para que sejam reais, efetivos, estes saldos devem ser recalculados em cada período do prazo considerado, pela equivalência de fluxos de caixa na forma simples.

Constata-se que os saldos originais são menores do que os saldos devedores efetivos, no cotejo entre o valor presente e as prestações, atualizados, a cada período.

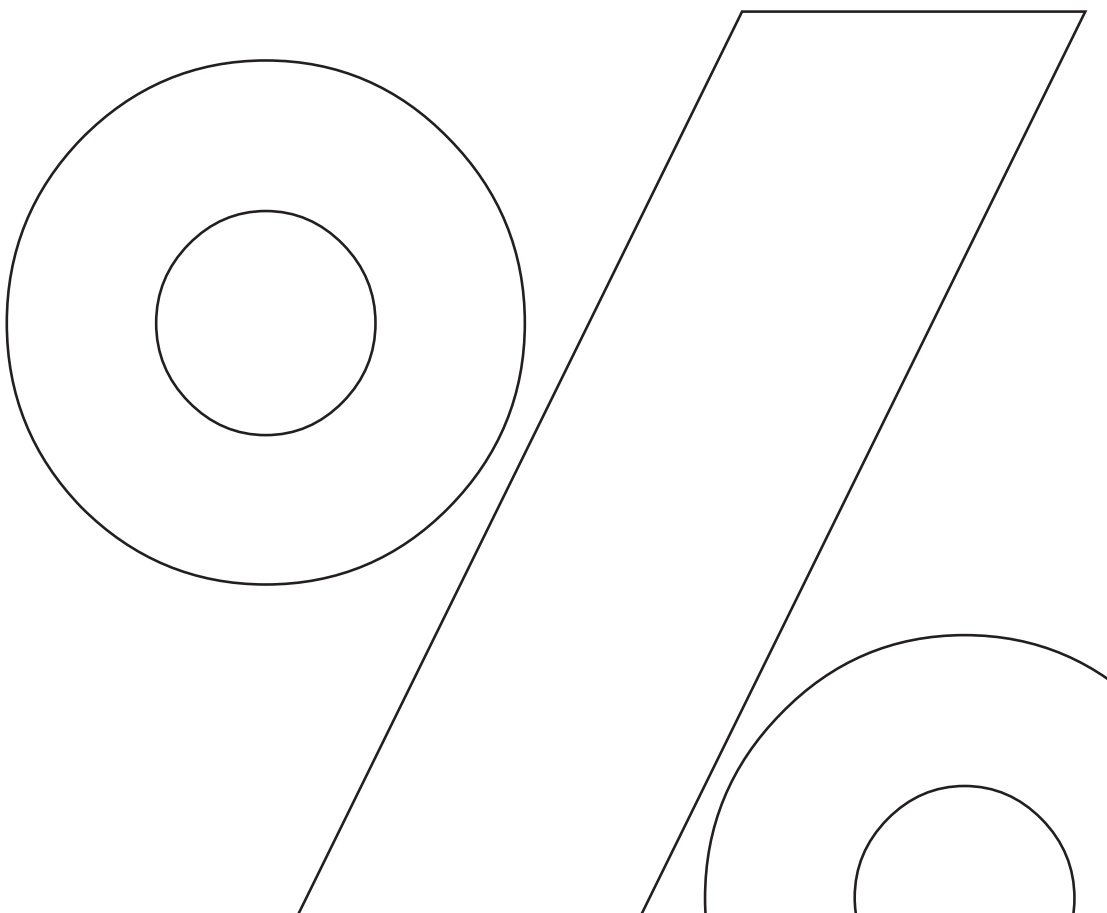
Considerado o exemplo padrão, $PV = R\$ 10.000,00$, $n = 7$, $i\% = 5\%$:

NUM PARC	0	1	2	3	4	5	6	7
PRESTAÇÃO 0		1.845,24	1.785,71	1.726,19	1.666,67	1.607,14	1.547,62	1.488,10
PRESTAÇÃO 1			1.937,50	1.875,00	1.812,50	1.750,00	1.687,50	1.625,00
PRESTAÇÃO 2				2.029,76	1.964,29	1.898,81	1.833,33	1.767,86
PRESTAÇÃO 3					2.122,02	2.053,57	1.985,12	1.916,67
PRESTAÇÃO 4						2.214,29	2.142,86	2.071,43
PRESTAÇÃO 5							2.306,55	2.232,14
PRESTAÇÃO 6								2.398,81
SOMA		1.845,24	3.723,21	5.630,95	7.565,48	9.523,81	11.502,98	13.500,00
PRINCIPAL ATUALIZADO	10.000,00	10.500,00	11.000,00	11.500,00	12.000,00	12.500,00	13.000,00	13.500,00
SALDO DEVEDOR EFETIVO	10.000,00	8.654,76	7.276,79	5.869,05	4.434,52	2.976,19	1.497,02	-
SALDO DEVEDOR NOMINAL	10.000,00	8.571,43	7.142,86	5.714,29	4.285,71	2.857,14	1.428,57	(0,00)
DIFERENÇA	-	83,33	133,93	154,76	148,81	119,05	68,45	0,00

NUM PARC	SALDO DEVEDOR MENSAL	VALOR PRESENTE ACUMULADO	AMORTIZAÇÃO NA PRESTAÇÃO	JURO NA PRESTAÇÃO	SALDO DEVEDOR RESIDUAL	PRESTAÇÃO MENSAL	PMTs ATUALIZADAS	SALDO DEVEDOR EFETIVO	DIFERENÇA
0		10.000,00			10.000,00			10.000,00	
1	10.000,00	10.500,00	1.428,57	416,67	8.571,43	1.845,24	1.845,24	8.654,76	83,33
2	8.571,43	11.000,00	1.428,57	357,14	7.142,86	1.785,71	3.723,21	7.276,79	133,93
3	7.142,86	11.500,00	1.428,57	297,62	5.714,29	1.726,19	5.630,95	5.869,05	154,76
4	5.714,29	12.000,00	1.428,57	238,10	4.285,71	1.666,67	7.565,48	4.434,52	148,81
5	4.285,71	12.500,00	1.428,57	178,57	2.857,14	1.607,14	9.523,81	2.976,19	119,05
6	2.857,14	13.000,00	1.428,57	119,05	1.428,57	1.547,62	11.502,98	1.497,02	68,45
7	1.428,57	13.500,00	1.428,57	59,52	(0,00)	1.488,10	13.500,00	-	0,00

CAPÍTULO 25

CAPITALIZAÇÃO SIMPLES DE JUROS EM SIMPLEX OU MQJS



CAPITALIZAÇÃO SIMPLES DE JUROS EM SIMPLEX OU MQJS

A constatação de que, quanto ao cálculo do valor da prestação, o MQJC e o SIMPLEX ou MQJS correspondem, exata e respectivamente, aos Métodos Price e Gauss, não haverá de ser motivo de retorno à insistência de muitos, em meramente tentar negar o que acabou de ser inequivocamente demonstrado.

O Método de Gauss é assim denominado, a partir dos anos 2000, por Meschiatti Nogueira, Rovina e Castelo Branco, que desenvolveram e aperfeiçoaram os estudos de Luiz Álvaro Ferreira Cavaleiro e Rodolpho Baptista de San Thiago. Mas tem-se notícias do uso da sistemática desde o século 18, com o próprio Gauss e, também, David Wikie e John Carr.

Dutra Sobrinho, apesar de não ser expresso, apresenta método equivalente, denominado Critério Linear Ponderado ou Método da Soma dos Dígitos.

A incorporação de juros a um determinado capital sempre caracterizará capitalização, simples ou composta.

Se, sob juros simples, ao invés de ser pago em uma única parcela juntamente com os juros, ao final do prazo contratado, o valor financiado for totalmente amortizado em prestações periódicas, de igual valor entre si, o sistema que oferece a solução para o cálculo exato deste valor da prestação contempla capitalização simples de juros, mediante aplicação dos princípios da progressão aritmética.

Mas, quanto à apuração das cotas de juro e de amortização contidas em cada prestação, e, por consequência, dos saldos devedores, conforme visto no Capítulo 24, SIMPLEX ou MQJS é o Método de Quitação a Juros Simples que permite calcular estas verbas de forma efetiva, consideradas as datas focais.

Em cada momento “m”, os saldos devedores são apurados mediante cotejo entre o capital inicial atualizado por juros simples de 0 a “m” e o somatório das prestações atualizadas por juros simples de 1 a “m”.

Há quem afirme que a sistemática de juros simples não comporta pagamento em prestações periódicas, mas não há lei matemática ou das finanças que impeça a quitação fracionada de financiamentos a juros simples.

Então, se, a juros simples, ao invés de receber o capital e os juros de uma só vez, ao final do prazo contratado, o credor de um financiamento ajustar receber um capital emprestado em prestações periódicas de mesmo valor nominal, de tal modo que os juros sejam exatamente iguais, a solução é dada pelo Método Gauss, que apresenta o exato resultado da prestação periódica e quita o saldo devedor ao final do prazo.

SIMPLEX ou MQJS é a metodologia adequada para o cálculo dos exatos valores dos saldos devedores e das cotas de juros e de amortização contidas em cada prestação.

A tabela SIMPLEX ou MQJS contendo saldo devedor, cotas de juro e de amortização, nada mais é do que a expressão de um algoritmo, conjunto de regras e operações próprias para se fazer os cálculos de forma facilitada, com número finito de etapas.

Mas o algoritmo não expressa a base analítica que originou o procedimento.

(1) Cálculo da prestação periódica a partir da fórmula geral de Gauss

$$\mathbf{PMT}_{js} = \frac{2 \cdot \mathbf{PV} \cdot [(i\% \cdot n) + 1]}{[(i\% \cdot n) - i\% + 2] \cdot n}$$

(2) Cálculo da cota de juros, aplicada a taxa sobre o saldo devedor

$$\mathbf{J}_n = i\% \cdot (\mathbf{PV} - \sum \mathbf{PMT}_{1 \rightarrow n-1})$$

ou

$$\mathbf{J}_n = i\% \cdot (\mathbf{SD}_{n-1} - \sum \mathbf{J}_{1 \rightarrow n-1})$$

(3) A cota de amortização resulta da diferença entre o valor da prestação e a cota de juros

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{SD}_0 - \mathbf{J}_1$$

(4) O saldo devedor do período seguinte é igual à diferença entre o saldo devedor anterior e a cota de amortização

$$\mathbf{SD}_1 = \mathbf{SD}_0 - \mathbf{A}_1$$

(5) Repete-se os passos 2 a 4, em looping, até a data focal n .

As cotas de amortização se constituem em uma série crescente, enquanto as cotas de juros fazem parte de uma série decrescente.

O valor da prestação obtida pela fórmula geral de Gauss, em analogia, corresponde a uma fotografia deste sistema de amortização.

A expressão gráfica do algoritmo corresponde à radiografia do método.

Mas como seria a ultrassonografia deste sistema de amortização?

Neste sistema, o juro total gerado é resultante de uma taxa multiplicada pelo principal, ou seja, os juros são incorporados ao saldo devedor, mas sempre calculados sobre o capital inicial.

Assim, em qualquer data focal do financiamento, o saldo devedor remanescente será sempre a **diferença** entre os valores recebidos e pagos, atualizados, em encontro de contas entre entradas e saídas, créditos versus débitos.

No caso do SIMPLEX ou MQJS, o saldo devedor será a diferença entre o capital inicial atualizado por juros simples até data em análise e o resultado da soma das prestações vencidas capitalizadas por juros simples também até a data atual.

O valor do juro simples em cada data é obtido mediante aplicação da taxa contratada sobre a diferença atualizada entre o saldo devedor anterior e o somatório dos juros incidentes sobre as prestações anteriores.

Observe-se que a capitalização simples em cada período é retratada pelo expurgo dos juros anteriores.

Tomando-se como exemplo $PV = 10.000$; $i\% = 5\%$; $n = 7$, $PMT = 1.728,20$, a obtenção dos juros e dos saldos devedores em cada data, de forma a dissecar os elementos do cálculo, detalhando o exposto no capítulo 24, tal como se fosse uma ultrassonografia, ocorre como segue.

Momento 0:

PV_0 : 10.000,00 (capital inicial), sem ocorrência de prestação ou de juros vencidos

$SD_0 = 10.000,00$.

Momento 1:

$$J_1 = SD_0 \times 5\% = 10.000,00 \times 5\% = 500,00$$

$$PV_1: 10.000,00 \times 1,05 = 10.500,00$$

$$PMT_1: 1.677,02 \times [1 + (5\% \times 0)] = 1.677,02 \times 1,00 = 1.677,02$$

$$SD_1 = 10.500,00 - 1.677,02 = 8.822,98$$

Momento 2:

$$J_2 = (SD_1 - \sum J_{1 \rightarrow 1}) \times 5\% = (8.822,98 - 500,00) \times 5\% = 416,15$$

$$PV_2: 10.000,00 \times 1,10 = 11.000,00$$

$$PMT_1: 1.677,02 \times 1,05 = 1.760,87$$

$$PMT_2: 1.677,02 \times 1,00 = 1.677,02$$

$$SD_2 = 11.000,00 - 1.760,87 - 1.677,02 = 7.562,11$$

Momento 3:

$$J_3 = (SD_2 - \sum J_{1 \rightarrow 2}) \times 5\% = (7.562,11 - 500,00 - 416,15) \times 5\% = 332,30$$

$$PV_3: 10.000,00 \times 1,15 = 11.500,00$$

$$PMT_1: 1.677,02 \times 1,10 = 1.844,72$$

$$PMT_2: 1.677,02 \times 1,05 = 1.760,87$$

$$PMT_3: 1.677,02 \times 1,00 = 1.677,02$$

$$SD_2 = 11.500,00 - 1.844,72 - 1.760,87 - 1.677,02 = 6.217,39$$

Momento 4:

$$J_4 = SD_3 - \sum J_{1 \rightarrow 3}) \times 5\% = (6.217,39 - 500,00 - 416,15 - 332,30) \times 5\% = 248,45$$

$$PV_4: 10.000,00 \times 1,20 = 12.000,00$$

$$PMT_1: 1.677,02 \times 1,15 = 1.928,57$$

$$PMT_2: 1.677,02 \times 1,10 = 1.844,72$$

$$PMT_3: 1.677,02 \times 1,05 = 1.760,87$$

$$PMT_4: 1.677,02 \times 1,00 = 1.677,02$$

$$SD_4 = 12.000,00 - 1.928,57 - 1.844,72 - 1.760,87 - 1.677,02 = 4.788,82$$

Momento 5:

$$J_5 = (SD_4 - \sum_{1 \rightarrow 4}) \times 5\% = (4.788,82 - 500,00 - 416,15 - 332,30 - 248,45) \times 5\% = 164,60$$

$$PV_5: 10.000,00 \times 1,25 = 12.500,00$$

$$PMT_1: 1.677,02 \times 1,20 = 2.012,42$$

$$PMT_2: 1.677,02 \times 1,15 = 1.928,57$$

$$PMT_3: 1.677,02 \times 1,10 = 1.844,72$$

$$PMT_4: 1.677,02 \times 1,05 = 1.760,87$$

$$PMT_5: 1.677,02 \times 1,00 = 1.677,02$$

$$SD_5 = 12.500,00 - 2.012,42 - 1.928,57 - 1.844,72 - 1.760,87 - 1.677,02 = 3.276,40$$

Momento 6:

$$J_6 = (SD_5 - \sum_{1 \rightarrow 5}) \times 5\% = (3.276,40 - 500,00 - 416,15 - 332,30 - 248,45 - 164,60) \times 5\% = 80,75$$

$$PV_6: 10.000,00 \times 1,30 = 13.000,00$$

$$PMT_1: 1.677,02 \times 1,25 = 2.096,27$$

$$PMT_2: 1.677,02 \times 1,20 = 2.012,42$$

$$PMT_3: 1.677,02 \times 1,15 = 1.928,57$$

$$PMT_4: 1.677,02 \times 1,10 = 1.844,72$$

$$PMT_5: 1.677,02 \times 1,05 = 1.760,87$$

$$PMT_6: 1.677,02 \times 1,00 = 1.677,02$$

$$SD_6 = 13.000,00 - 2.096,27 - 2.012,42 - 1.928,57 - 1.844,72 - 1.760,87 - 1.677,02 = 1.680,12$$

Momento 7:

$$J_7 = SD_6 \times - \sum_{1 \rightarrow 6} \times 5\% = (1.680,12 - 500,00 - 416,15 - 332,30 - 248,45 - 164,60 - 80,75) \times 5\% = -3,11$$

$$PV_7: 10.000,00 \times 1,35 = 13.500,00$$

$$\text{PMT}_1: 1.677,02 \times 1,30 = 2.180,12$$

$$\text{PMT}_2: 1.677,02 \times 1,25 = 2.096,27$$

$$\text{PMT}_3: 1.677,02 \times 1,20 = 2.012,42$$

$$\text{PMT}_4: 1.677,02 \times 1,15 = 1.928,57$$

$$\text{PMT}_5: 1.677,02 \times 1,10 = 1.844,72$$

$$\text{PMT}_6: 1.677,02 \times 1,05 = 1.760,87$$

$$\text{PMT}_7: 1.677,02 \times 1,00 = 1.677,02$$

$$\text{SD}_7 = 13.500,00 - 2.180,12 - 2.096,27 - 2.012,42 - 1.928,57 - 1.844,72 - 1.760,87 - 1.677,02 = 0,00$$

Pode-se analisar o comportamento dos juros de forma mais detalhada, tal como se fosse uma tomografia.

O valor do juro simples em cada data é obtido pela diferença entre mediante aplicação da taxa contratada sobre a diferença entre o capital inicial e o somatório das prestações dos períodos anteriores.

O juro simples de cada período resulta da aplicação da taxa contratada sobre a diferença entre a parcela de juro incidente sobre o capital inicial e o somatório dos juros incidentes sobre as prestações anteriores, entre o momento “1” e o “m”.

O juro de cada período, a partir do primeiro, resulta da aplicação da taxa capitalizada de forma simples sobre a diferença entre o capital inicial e o somatório do valor das prestações entre o momento “1” e o “m”.

$$J_m = J_{PV} - \sum J_{\text{PMT1} \rightarrow m}$$

Momento 1:

$$J_1 = J_{PV1} - \sum J_{\text{PMT1} \rightarrow 1}$$

$$PV \cdot i\% = 10.000,00 \times 5\% = 500,00$$

$$\text{PMT}_1 \cdot i\% = 1.677,02 \times 0\% = 0,00 \times 5\% = 0,00$$

$$500,00 - 0,00 = 500,00$$

Momento 2:

$$J_2 = J_{PV2} - \sum J_{PMT1 \rightarrow 2}$$

$$PV \cdot i\% = 10.000,00 \times 5\% = 500,00$$

$$PMT_1 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$PMT_2 \cdot i\% = 1.677,02 \times 0\% = 0,00$$

$$500,00 - 83,85 - 0,00 = 416,15$$

Momento 3:

$$J_3 = J_{PV3} - \sum J_{PMT1 \rightarrow 3}$$

$$PV \cdot i\% = 10.000,00 \times 5\% = 500,00$$

$$PMT_1 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$PMT_2 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$PMT_3 \cdot i\% = 1.677,02 \times 0\% = 0,00$$

$$500,00 - 83,85 - 83,85 - 0,00 = 332,30$$

Momento 4:

$$J_4 = J_{PV4} - \sum J_{PMT1 \rightarrow 4}$$

$$PV \cdot i\% = 10.000,00 \times 5\% = 500,00$$

$$PMT_1 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$PMT_2 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$PMT_3 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$PMT_4 \cdot i\% = 1.677,02 \times 0\% = 0,00$$

$$500,00 - 83,85 - 83,85 - 83,85 - 0,00 = 248,45$$

Momento 5:

$$J_5 = J_{PV5} - \sum J_{PMT1 \rightarrow 5}$$

$$PV \cdot i\% = 10.000,00 \times 5\% = 500,00$$

$$PMT_1 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$\text{PMT}_2 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$\text{PMT}_3 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$\text{PMT}_4 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$\text{PMT}_5 \cdot i\% = 1.677,02 \times 0\% = 0,00$$

$$500,00 - 83,85 - 83,85 - 83,85 - 83,85 - 0,00 = 164,60$$

Momento 6:

$$J_6 = J_{\text{PV}6} - \sum J_{\text{PMT}1 \rightarrow 6}$$

$$\text{PV} \cdot i\% = 10.000,00 \times 5\% = 500,00$$

$$\text{PMT}_1 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$\text{PMT}_2 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$\text{PMT}_3 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$\text{PMT}_4 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$\text{PMT}_5 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$\text{PMT}_6 \cdot i\% = 1.677,02 \times 0\% = 0,00$$

$$500,00 - 83,85 - 83,85 - 83,85 - 83,85 - 83,85 - 0,00 = 80,75$$

Momento 7:

$$J_7 = J_{\text{PV}7} - \sum J_{\text{PMT}1 \rightarrow 7}$$

$$\text{PV} \cdot i\% = 10.000,00 \times 5\% = 500,00$$

$$\text{PMT}_1 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$\text{PMT}_2 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$\text{PMT}_3 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$\text{PMT}_4 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$\text{PMT}_5 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$\text{PMT}_6 \cdot i\% = 1.677,02 \times 5\% = 83,85$$

$$\text{PMT}_7 \cdot i\% = 1.677,02 \times 0\% = 0,00$$

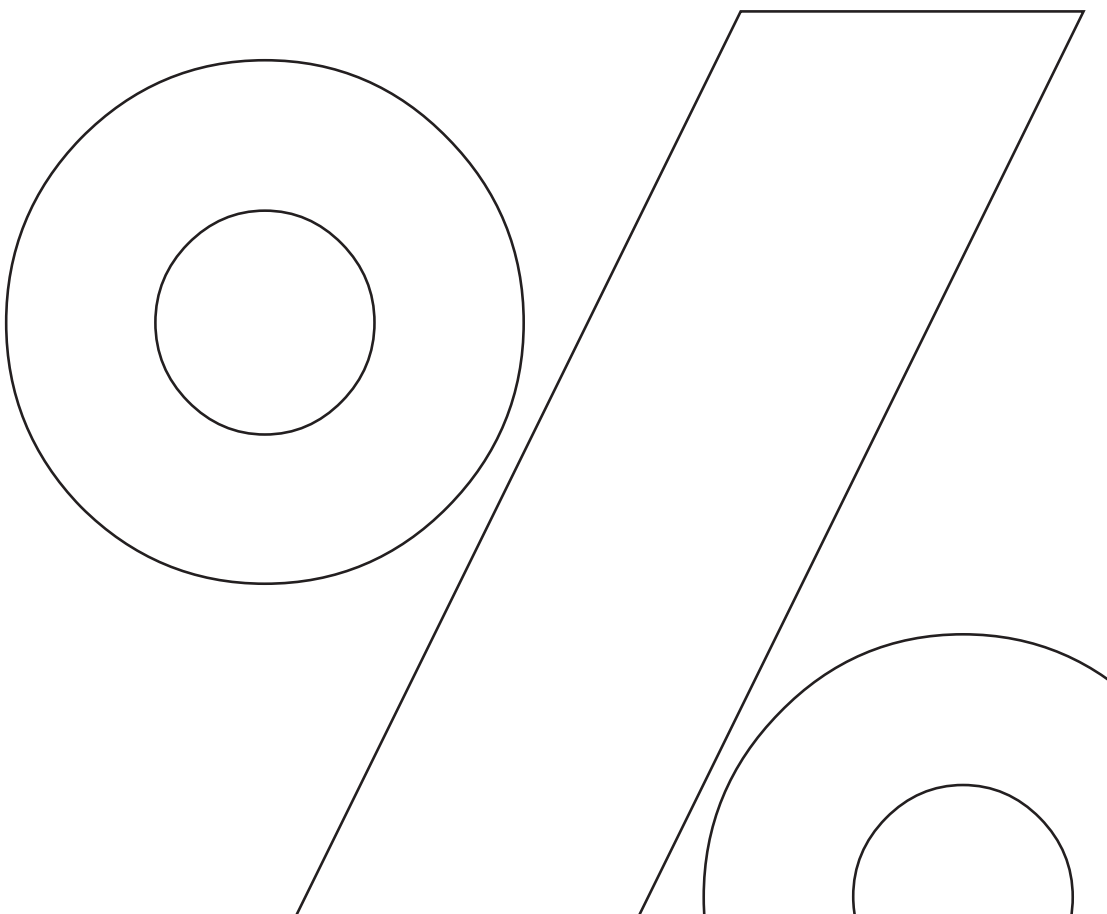
$$500,00 - 83,85 - 83,85 - 83,85 - 83,85 - 83,85 - 83,85 - 0,00 = -3,11$$

Num	VP	Juros simples sobre VP	PMT	Juros simples sobre PMTs	Juros simples acumulados sobre PMTs	Juros a apropriar sobre a diferença entre juros do PV e PMTs
0	10.000,00					
1	10.000,00	500,00	1.677,02	-	-	500,00
2	10.000,00	500,00	1.677,02	83,85	83,85	416,15
3	10.000,00	500,00	1.677,02	167,70	251,55	332,30
4	10.000,00	500,00	1.677,02	251,55	503,11	248,45
5	10.000,00	500,00	1.677,02	335,40	838,51	164,60
6	10.000,00	500,00	1.677,02	419,25	1.257,76	80,75
7	10.000,00	500,00	1.677,02	503,11	1.760,87	- 3,11

Assim, resta comprovada a capitalização simples de juros, no SIMPLEX ou MQJS.

CAPÍTULO 26

ANATOCISMO OU CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA DE JUROS EM PRICE



ANATOCISMO OU CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA DE JUROS EM PRICE

Quanto à capitalização composta, há notícias de que já existia na era antes de Cristo, ou, pelo menos no século 16. No século 18, Richard Price utilizou os princípios da progressão geométrica para uso em seguros e previdência. No século 19, na França, o método foi utilizado na área financeira, e passou a ser denominado “Sistema Francês de Amortização”.

O próprio Richard Price afirmara desde o início que suas tabelas eram baseadas em “*compound interest*” (juros compostos). Deslumbrado com a grandiosidade dos resultados obtidos através da função exponencial, fazia disto propaganda de seu método. Enfim, a sistemática incorpora basicamente a função do juro capitalizado de forma composta.

“Um centavo de libra emprestado na data de nascimento de nosso Salvador a cinco por cento, juro composto, teria aumentado, no presente ano de 1781, para um valor maior do que o contido em duas centenas de milhões de terras, todas de ouro maciço. ... Porém, se emprestado a juro simples, teria resultado, no mesmo tempo, num montante nada maior do que sete xelins e seis centavos. ...”

É totalmente incongruente afirmar que se utiliza juros compostos, mas isso não significa capitalização composta, em especial se a sistemática expressa a prática de juros sobre juros, que são agregados gradativa e cumulativamente ao saldo devedor.

Primeiramente, sob o prisma jurídico, conforme consta no Thesaurus da Ciência Jurídica do STJ – Superior Tribunal de Justiça, juro composto significa juro sobre juro, juro progressivo, ou anatocismo.

É a mesma afirmação feita, em diversos países, por inúmeras publicações especializadas em Matemática, Economia e Direito.

Afora isto, a maior autoridade monetária do País, o Banco Central do Brasil, no tópico relativo à calculadora do cidadão, explica que a metodologia de financiamento a ser amortizado mediante prestações fixas é obtida pelo cálculo com juros compostos e capitalização mensal.

www.bcb.gov.br/pec/calculo/calc_financiamento/metodologia.asp?idpai=prestfixacal

Ademais, diversas cortes de justiça no País, já decidiram que o sistema Price é baseado em capitalização de juros compostos ou anatocismo, eis que adota o método exponencial no cálculo dos juros, que crescem em progressão geométrica.

A capitalização de juros, gerada pela sistemática de juros compostos do Método Price, chegou a ser reconhecida em muitos julgados do STJ, dos anos de 2003 a 2005, antes de curiosamente esta corte deixar de apreciar casos concretos, sob o argumento de que se constitui em matéria fática, fora de sua esfera de competência.

Cabe referir a decisão recente no Recurso Repetitivo 1.388.972/SC, da 2ª Seção do STJ. Ao abordar o que seria capitalização de juros, o voto vencedor afirmou categoricamente que: *‘capitalização dos juros’, ‘juros compostos’, ‘juros frugíferos’, ‘juros sobre juros’, ‘anatocismo’ constituem variações linguísticas para designar um mesmo fenômeno jurídico-normativo que se apresenta em oposição aos juros simples.*

Sob o ponto de vista matemático, cabe lembrar que, desde o século 18, na Europa, os idealizadores do método Price afirmaram que a metodologia, também denominada Sistema de Amortizações Crescentes, incorpora basicamente a função do juro composto ou anatocismo ou capitalizado de forma composta.

No Brasil, inúmeros e consistentes trabalhos técnicos foram publicados, e renomados especialistas em Matemática confirmaram a capitalização de juro na Tabela Price.

“O respeito da lei é a primeira expressão da liberdade.”
(Machado de Assis)

Assim como se deve cumprir as leis jurídicas, também as leis matemáticas devem ser respeitadas, e todos as operações e os procedimentos devem ser construídos de acordo com seus postulados, conceitos, axiomas, teoremas, corolários e lemas, alguns vigentes há séculos.

A Matemática impõe a ética e o perfeccionismo, pois não existe meio termo: algo é verdadeiro ou é falso, e, desde que aplicados os mesmos princípios, tudo pode ser feito e refeito, repetido exatamente igual, sem indefinições.

Então, se a juros compostos, ao invés de receber o capital e os juros de uma só vez, ao final do prazo contratado, o credor de um financiamento ajustar receber um capital emprestado em prestações periódicas de mesmo valor nominal, de tal modo que os juros sejam exatamente iguais, a solução é dada pelo Método Price, que apresenta o exato resultado da prestação e quita o saldo devedor ao final do prazo, sob capitalização composta de juros, mediante aplicação dos princípios da progressão geométrica.

Ou seja, o fluxo de caixa, sob juros compostos, ao invés de se constituir em uma entrada igual ao capital inicial e uma saída igual ao valor futuro, será constituído pela mesma entrada e as saídas pelo número de prestações com valor suficiente a se equipararem ao valor futuro.

O valor futuro (FV_1) obtido a partir do capital inicial PV levado ao final do prazo deve ser igual ao valor futuro (FV_2) obtido a partir do somatório de todas as prestações (PMT) levadas também para o final do prazo.

Conforme Rovina:

$$\begin{aligned}FV_1 &= FV_2 \\FV_1 &= PV \cdot (1 + i\%)^n\end{aligned}$$

Cada valor de prestação terá um valor futuro em n, proporcional ao período a decorrer para ser ajustado àquele momento final

$$FV_2 = PMT \cdot (1+i\%)^{n-1} + PMT \cdot (1+i\%)^{n-2} + PMT \cdot (1+i\%)^{n-3} + \dots + PMT \cdot (1+i\%) + PMT$$

Colocando PMT em evidência:

$$FV_2 = PMT \cdot [(1+i\%)^{n-1} + (1+i\%)^{n-2} + (1+i\%)^{n-3} + \dots + (1+i\%) + 1]$$

A parte dentro dos colchetes representa a soma de uma progressão geométrica (PG), com o primeiro termo (a_1) igual a $(1+i\%)^{n-1}$, a razão (q) igual a $[1/(1+i\%)]$ e uma quantidade de termos n.

A soma dos termos de uma PG é dada pela fórmula:

$$S_n = [a_1 \cdot (q^{n-1})] / (q-1)$$

Usando os dados retro:

$$S_n = (1+i\%)^{n-1} \cdot \{[(1 / (1+i\%))^n] - 1\} / \{[1 / (1+i\%)] - 1\}$$

$$S_n = \{[(1 + i\%)^n - 1] / i\%\}$$

Substituindo, obtém-se a fórmula para o cálculo do valor futuro, a partir da prestação:

$$FV = \frac{PMT \cdot [(1+i\%)^n - 1]}{i\%}$$

em que $\{[(1+i\%)^n - 1] / i\}$ corresponde ao **FAC_{JC} (i%, n) – Fator de Acumulação de Capital a Juros Compostos**.

Se $PMT = 1.728,20$,

$$FV = 1.728,20 \cdot [(1+5\% ^ 7) - 1] / 5\% = 14.071,00$$

Por óbvio, **conhecido o valor futuro é possível apurar o valor da prestação**:

$$PMT = FV \cdot \{ i\% / [(1+i\%)^n - 1] \}$$

em que $\{ i\% / [(1+i\%)^n - 1] \}$ corresponde ao **FFC_{JC} (i%, n) – Fator de Formação de Capital a Juros Compostos**.

$$PMT = 14.071,00 \times 5\% / [(1+5\% ^ 7) - 1] = 1.728,20$$

Por outro lado, se **há uma série de pagamentos iguais e é conhecido valor da prestação, é possível apurar o valor do capital inicial aplicado**.

Retornando à igualdade $FV_1 = FV_2$:

$$PV \cdot (1+i\%)^n = PMT \cdot [(1+i\%)^n - 1] / i\%$$

$$PV = PMT \cdot [(1+i\%)^n - 1] / i \cdot (1+i\%)^n$$

ou

$$PV \cdot (1+i\%)^n = PMT \cdot (1+i\%)^0 + PMT \cdot (1+i\%)^1 + PMT \cdot (1+i\%)^2 + \\ + PMT \cdot (1+i\%)^{n-2} + PMT \cdot (1+i\%)^{n-1}$$

Colocando PMT em evidência:

$$PV \cdot (1+i\%)^n = PMT \cdot [(1+i\%)^0 + (1+i\%)^1 + (1+i\%)^2 + \dots + (1+i\%)^{n-2} + (1+i\%)^{n-1}]$$

A expressão entre colchetes representa a soma de uma progressão geométrica (PG), com o primeiro termo (a_1) igual a $(1+i)^0$, a razão (q) igual a $(1+i\%)$ e um número de termos n .

A soma dos termos de uma PG é dada pela fórmula:

$$S_n = [a_1 \cdot (q^{n-1})] / (q-1)$$

Usando os dados retro:

$$S_n = (1+i\%)^0 \cdot [(1+i\%)^{n-1}] / [(1+i\%) - 1]$$

$$S_n = (1+i\%)^0 \cdot [(1+i\%)^{n-1}] / [(1+i\%) - 1]$$

Substituindo:

$$PV \cdot (1+i\%)^n = PMT \cdot (1+i\%)^0 \cdot [(1+i\%)^{n-1}] / [(1+i\%) - 1]$$

Isolando PV, obtém-se a fórmula para o cálculo do valor presente, a partir da prestação:

$$PV = PMT \cdot \frac{[(1+i\%)^n - 1]}{[(1+i\%)^n] \cdot i\%}$$

em que $[(1+i\%)^n - 1] / [(1+i\%)^n] \cdot i\%$ corresponde ao **FVA_{JC} (i%, n) – Fator de Valor Atual a Juros Compostos**.

$$PV = 1.728,20 \times [(1+5\% ^ 7) - 1] / (1+5\% ^ 7) \times 5\% = 10.000,00$$

Pode-se também obter equação equivalente do valor da prestação fixa a partir do capital inicial ou valor presente, sob determinada taxa de juros.

$$PMT = PV \cdot \frac{[i\% \cdot (1+i\%)^n]}{[(1+i\%)^n - 1]}$$

em que $[i \cdot (1+i\%)^n] / [(1+i\%)^n - 1]$ corresponde ao **FRC_{JC} (i%, n) – Fator de Recuperação de Capital a Juros Compostos**.

$$PMT = 10.000,00 \times 5\% \times (1+5\% ^ 7) / [(1+5\% ^ 7) - 1] = 1.728,20.$$

Todas essas expressões foram desenvolvidas algebricamente, mediante utilização dos juros compostos ou da capitalização composta de juros, de acordo com os postulados da matemática.

Restou comprovado que, sendo o anatocismo a incorporação de juros vencidos ao capital, para geração de novos juros, que expressa capitalização composta de juros, uma vez também aplicados os conceitos de juros compostos, para calcular o valor de cada uma das prestações equivalentes, os dois resultados têm exatamente o mesmo valor.

A demonstração algébrica deixa claro que somente é possível obter as fórmulas através da capitalização composta de juros, e estas equações correspondem exatamente às equações do Método Price, cujo modelo básico se constitui de uma série de pagamentos exclusivamente sob o regime de juros compostos, em que o retorno das prestações é exatamente igual ao retorno do capital inicial a juros compostos ao final do prazo.

Assim se consubstancia a prova irrefutável de que o Método Price se fundamenta e contempla a capitalização composta de juros.

IMPORTANTE LEMBRAR QUE A ORIGEM DESTA ANÁLISE É O RESGATE DE UM CAPITAL, SOB DETERMINADA TAXA DE JUROS E CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA, AO FINAL DE UM PRAZO, EM UMA SÓ PARCELA, E QUE, POR ALTERNATIVA, HOVE-SE POR BEM FAZER A QUITAÇÃO EM PARCELAS FIXAS E PERIÓDICAS.

O ALGORITMO DA TABELA PRICE

Em cada momento “m”, os saldos devedores são apurados mediante cotejo entre o capital inicial atualizado por juros compostos de 0 a “m” e o somatório das prestações atualizadas por juros compostos de 1 a “m”.

Uma vez aplicada a fórmula geral para obter o valor da prestação, a partir do capital inicial, da taxa de juros e do prazo determinado, foi criada uma rotina para cálculo das cotas de juros e amortização em cada parcela Price, que resulta em um plano de pagamentos.

- (1) Cálculo da prestação periódica a partir da fórmula geral

$$PMT = [PV \cdot i\% \cdot (1+i\%)^n] / [(1+i\%)^n - 1]$$

- (2) Cálculo da cota de juros, aplicada a taxa sobre o saldo devedor

$$J_1 = SD_0 \cdot i\%$$

(3) A cota de amortização resulta da diferença entre o valor da prestação e a cota de juros

$$A_1 = Sd_0 - J_1$$

(4) O saldo devedor do período seguinte é igual à diferença entre o saldo devedor anterior e a cota de amortização

$$Sd_1 = Sd_0 - A_1$$

(5) Repete-se os passos 2 a 4, em looping, até o período n.

A tabela Price contendo saldo devedor, cotas de juro e de amortização, expressa um algoritmo, conjunto de regras e operações próprias para se fazer os cálculos de forma facilitada, com número finito de etapas.

Um algoritmo consiste meramente em um fluxograma de ações programadas e ordenadas de execução, sem expressar a base analítica que originou o procedimento.

É como se fosse um artifício de cálculo, um “macete” ou uma “dica prática” de como efetuar os cálculos através de atalhos.

Mas o algoritmo não revela o sentido e os fundamentos do que está por trás dos números aparentemente simples de obter, nem expressa a base analítica que originou o procedimento.

É um único ponto dentro de um sistema, maior e mais complexo, que engloba um conjunto de elementos organizados.

Ater-se a este único ponto, sem considerar o conjunto, carece de respaldo técnico.

As cotas de amortização se constituem em uma série crescente, enquanto as cotas de juros fazem parte de uma série decrescente.

Num	PMT	Juros sobre SD	Amortização	Saldo devedor residual
Σ	12.097,39	2.097,39	10.000,00	
0				10.000,00
1	1.728,20	500,00	1.228,20	8.771,80
2	1.728,20	438,59	1.289,61	7.482,19
3	1.728,20	374,11	1.354,09	6.128,11
4	1.728,20	306,41	1.421,79	4.706,31
5	1.728,20	235,32	1.492,88	3.213,43
6	1.728,20	160,67	1.567,53	1.645,90
7	1.728,20	82,30	1.645,90	-

Um alerta: ESTA TABELA INDUZ A UMA ILUSÃO DE ÓTICA!!!

O tempo é a chave do ganho do capital emprestado.

Cabe relembrar: em Matemática Financeira, a função de elevação pelos juros compostos jamais admite a soma das parcelas fixas para se comparar com o capital inicial, pois ele é função do tempo e seu retorno dá-se sempre de forma exponencial.

MOMENTO	PRESTAÇÃO PERIÓDICA	JURO NA PRESTAÇÃO	AMORTIZAÇÃO NA PRESTAÇÃO	SALDO DEVEDOR RESIDUAL
Σ	12.097,39	2.097,39	10.000,00	
0				10.000,00
1	1.728,20	500,00	1.228,20	8.771,80
2	1.728,20	438,59	1.289,61	7.482,19
3	1.728,20	374,11	1.354,09	6.128,11
4	1.728,20	306,41	1.421,79	4.706,31
5	1.728,20	235,32	1.492,88	3.213,43
6	1.728,20	160,67	1.567,53	1.645,90
7	1.728,20	82,30	1.645,90	0,00

Num	Juro do período	VP acumulado de 0 a m	PMT	Juros em "m"	Amortização em "m"	Saldo devedor em "m"	DIFERENÇA JURO SOBRE PV E SOBRE PMTs
	4.071,00		12.097,39	2.097,39	10.000,00		1.973,62
0		10.000,00				10.000,00	
1	500,00	10.500,00	1.728,20	500,00	1.228,20	8.771,80	-
2	525,00	11.025,00	1.728,20	438,59	1.289,61	7.482,19	86,41
3	551,25	11.576,25	1.728,20	374,11	1.354,09	6.128,11	177,14
4	578,81	12.155,06	1.728,20	306,41	1.421,79	4.706,31	272,41
5	607,75	12.762,82	1.728,20	235,32	1.492,88	3.213,43	372,44
6	638,14	13.400,96	1.728,20	160,67	1.567,53	1.645,90	477,47
7	670,05	14.071,00	1.728,20	82,30	1.645,90	0,00	587,75

Convém frisar que a *lex mater* da Matemática Financeira contém cláusulas pétreas, que expressam princípios sagrados:

1. Dois ou mais valores são iguais se e somente se tiverem o mesmo valor nominal e estiverem na mesma data focal.

2. Sempre devem ser analisadas as operações a partir do presente com vistas ao futuro.

3. A capitalização simples e a capitalização composta são conceitos de regimes de incidência de juros, mutuamente excludentes entre si.

4. Um único período permite apurar juros, mas são necessários no mínimo dois períodos distintos para se analisar o regime de capitalização, se simples ou composto.

Então, pelo princípio número 1, **as prestações de Price são fixas apenas aparentemente.**

Apenas admitir ou afirmar incidência de juros simples na construção da Tabela Price, conforme o algoritmo, não demonstra o que acontece com os juros no seguinte ou demais períodos.

A mera multiplicação do saldo devedor pela taxa de juros deixa de considerar o fator tempo, uma vez que os valores envolvidos na operação, para serem processados, devem ser alinhados a partir de cada momento “m” de sua ocorrência até o final do prazo “n”.

Segundo Rovina, a análise de um único ponto incorre em equívoco ou erro conceitual, pois não permite verificar a ocorrência de capitalização simples ou composta de juros, procedimento que necessita de pelo menos dois períodos.

A partir do conceito de juros compostos, tem-se que:

$$JC = PV \times [(1+i\%)^n - 1]$$

Atribuindo ao prazo o valor 1, conforme o algoritmo:

$$JC = PV \times [(1+i\%)^1 - 1]$$

$$JC = PV \times [1+i\% - 1]$$

$$JC = PV \times i\%$$

Procedendo da mesma forma com o conceito de juros simples, tem-se o mesmo resultado:

$$JS = PV \times [(1+i\% \cdot n) - 1]$$

Atribuindo ao prazo o valor 1, conforme o algoritmo:

$$JS = PV \times [(1+i\% \times 1) - 1]$$

$$JS = PV \times [1+i\% - 1]$$

$$JS = PV \times i\%$$

É evidente não ser possível utilizar “saldo anterior multiplicado pela taxa”, haja vista que, sob o rigor da matemática, uma equação não pode apresentar o mesmo resultado ao representar dois conceitos diametralmente opostos, antagônicos ou mutuamente excludentes, tais como são os juros simples e os juros compostos.

No caso do Método Price, o saldo devedor será a diferença entre o capital inicial capitalizado por juros compostos até data em análise e o resultado da soma das prestações vencidas capitalizadas por juros compostos também até a data atual.

Em essência, o algoritmo e a tabela demonstrativa de Price são apenas partes aparentes de um sistema maior e mais complexo, que engloba um conjunto de elementos organizados, cujo sentido e fundamentos são ideias logicamente solidárias e interligadas.

Não basta se ater apenas ao algoritmo da tabela Price, pois há que se fazer análise mais cuidadosa da questão.

Por analogia, o valor da prestação obtida pela fórmula geral de Price corresponde a uma fotografia deste sistema de amortização.

A expressão gráfica do algoritmo corresponde à radiografia do método.

Mas como seria a ultrassonografia deste sistema de amortização?

É imperioso que todos os procedimentos matemáticos sejam construídos dentro de seus conceitos, axiomas, teoremas, corolários e lemas, alguns vigentes há milênios, devendo, todos, respeitá-los em sua plenitude.

A matemática financeira é o campo da matemática que estuda valores no tempo, em relação a suas respectivas datas.

A capitalização composta de juros resulta da incidência de uma taxa multiplicada pelo principal mais os juros acumulados, ou seja, os juros são incorporados ao saldo devedor e, sobre este novo saldo devedor, novos juros são cobrados.

Há um valor presente no momento inicial, um valor futuro no momento final, uma taxa de juros e um prazo, que é o número de períodos existentes entre momento inicial e momento final.

São estas as informações base de todas as fórmulas de matemática financeira.

No caso de fracionamento da amortização do empréstimo, entre o momento inicial e o momento final há os períodos intermediários.

Óbvio que, se o anatocismo se constitui em juros vencidos que são incorporados ao capital para geração de novos juros, e o Método Price apresenta a solução para o pagamento parcelado em prestações periódicas fixas, isto é prova insofismável de que o sistema se fundamenta em capitalização composta de juros.

Assim, em qualquer data focal do financiamento, o saldo devedor remanescente será sempre a **diferença** entre os valores recebidos e os valores pagos, encontro de contas entre entradas e saídas, créditos versus débitos.

No caso do Método Price, o saldo devedor será a diferença entre o capital inicial capitalizado por juros compostos até data em análise e o resultado da soma das prestações vencidas capitalizadas por juros compostos também até a data atual.

O juro vencido em cada data é obtido mediante aplicação da taxa contratada sobre a diferença apurada no momento anterior, ou seja, o saldo devedor obtido mediante capitalização composta de juros dos créditos e dos débitos.

Tomando-se como exemplo $PV = 10.000$; $i\% = 5\%$; $n = 7$, $PMT = 1.728,20$, a obtenção dos juros e dos saldos devedores em cada data, de forma a dissecar os elementos do cálculo, detalhando o exposto no capítulo 23, tal como se fosse uma ultrassonografia, ocorre como segue.

Momento 0:

PV_0 : 10.000,00 (capital inicial), sem ocorrência de prestação ou de juros vencidos

$$SD_0 = 10.000,00.$$

Momento 1:

$$J_n = PV \cdot i\% \cdot (1 + i\%)^{n-1} - PMT \cdot [(1+i\%)^{n-1} - 1]$$

$$J_1 = 10.000 \times 5\% \times (1,05)^0 - 1.728,20 \times (1,05^0 - 1)$$

$$J_1 = 500,00 \times 1 - 0 = 500,00 \text{ ou}$$

$$J_1 = SD_0 \times 5\% = 10.000,00 \times 5\% = 500,00$$

$$PV_1: 10.000,00 \times [(1+5\%)^1] = 10.000,00 \times 1,05 = 10.500,00$$

$$PMT_1: 1.728,20 \times [(1+5\%)^0] = 1.728,20 \times 1,00 = 1.728,20$$

$$SD_1 = 10.500,00 - 1.728,20 = 8.771,80$$

Momento 2:

$$J_2 = 10.000,00 \times 5\% \times 1,05^1 - 1.728,20 \times (1,05^1 - 1)$$

$$J_2 = 525,00 - 86,41 = 438,59 \text{ ou}$$

$$J_2 = SD_1 \times 5\% = 8.771,80 \times 5\% = 438,59$$

$$PV_2: 10.000,00 \times 1,05 = 10.500,00 \times 1,05 = 11.025,00$$

$$PMT_1: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61$$

$$PMT_2: 1.728,20 \times 1,00 = 1.728,20$$

$$SD_2 = 11.025,00 - 1.814,61 - 1.728,20 = 7.482,19$$

Momento 3:

$$J_3 = 10.000,00 \times 5\% \times 1,05^2 - 1.728,20 \times (1,05^2 - 1)$$

$$J_3 = 551,25 - 177,14 = 374,11 \text{ ou}$$

$$J_3 = SD_2 \times 5\% = 7.482,19 \times 5\% = 374,11$$

$$PV_3: 10.000,00 \times 1,05 = 10.500,00 \times 1,05 = 11.025,00 \times 1,05 = 11.576,25$$

$$PMT_1: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61 \times 1,05 = 1.905,33$$

$$PMT_2: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61$$

$$PMT_3: 1.728,20 \times 1,00 = 1.728,20$$

$$SD_3 = 11.576,25 - 1.905,33 - 1.814,61 - 1.728,20 = 6.128,11$$

Momento 4:

$$J_4 = 10.000,00 \times 5\% \times 1,05^3 - 1.728,20 \times (1,05^3 - 1)$$

$$J_4 = 578,81 - 272,40 = 306,41 \text{ ou}$$

$$J_4 = SD_3 \times 5\% = 6.128,11 \times 5\% = 306,41$$

$$PV_4: 10.000,00 \times 1,05 = 10.500,00 \times 1,05 = 11.025,00 \times 1,05 = 11.576,25 \times 1,05 = 12.155,06$$

$$PMT_1: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61 \times 1,05 = 1.905,33 \times 1,05 = 2.000,61$$

$$PMT_2: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61 \times 1,05 = 1.905,33$$

$$PMT_3: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61$$

$$PMT_4: 1.728,20 \times 1,00 = 1.728,20$$

$$SD_4 = 11.576,25 - 2.000,61 - 1.905,33 - 1.814,61 - 1.728,20 = 4.706,31$$

Momento 5:

$$J_5 = 10.000,00 \times 5\% \times 1,05^4 - 1.728,20 \times (1,05^4 - 1)$$

$$J_5 = 607,76 - 372,44 = 235,32 \text{ ou}$$

$$J_5 = SD_4 \times 5\% = 4.706,31 \times 5\% = 235,32$$

$$PV_5: 10.000,00 \times 1,05 = 10.500,00 \times 1,05 = 11.025,00 \times 1,05 = 11.576,25 \times 1,05 \\ = 12.155,06 \times 1,05 = 12.762,82$$

$$PMT_1: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61 \times 1,05 = 1.905,33 \times 1,05 = 2.100,64$$

$$PMT_2: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61 \times 1,05 = 1.905,33 \times 1,05 = 2.000,61$$

$$PMT_3: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61 \times 1,05 = 1.905,33$$

$$PMT_4: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61$$

$$PMT_5: 1.728,20 \times 1,00 = 1.728,20$$

$$SD_5 = 12.762,82 - 2.100,64 - 2.000,61 - 1.905,33 - 1.814,61 - 1.728,20 = 3.213,43$$

Momento 6:

$$J_6 = 10.000,00 \times 5\% \times 1,05^5 - 1.728,20 \times (1,05^5 - 1)$$

$$J_6 = 638,14 - 477,47 = 160,67 \text{ ou}$$

$$J_6 = SD_5 \times 5\% = 3.213,43 \times 5\% = 160,67$$

$$PV_6: 10.000,00 \times 1,05 = 10.500,00 \times 1,05 = 11.025,00 \times 1,05 = 11.576,25 \times 1,05 \\ = 12.155,06 \times 1,05 = 12.762,82 \times 1,05 = 13.400,96$$

$$PMT_1: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61 \times 1,05 = 1.905,33 \times 1,05 = 2.000,61 \times 1,05 \\ = 2.100,64 \times 1,05 = 2.205,67$$

$$PMT_2: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61 \times 1,05 = 1.905,33 \times 1,05 = 2.000,61 \times 1,05 \\ = 2.100,64$$

$$PMT_3: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61 \times 1,05 = 1.905,33 \times 1,05 = 2.000,61$$

$$PMT_4: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61 \times 1,05 = 1.905,33$$

$$PMT_5: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61$$

$$PMT_6: 1.728,20 \times 1,00 = 1.728,20$$

$$SD_6 = 13.400,96 - 2.205,67 - 2.100,64 - 2.000,61 - 1.905,33 - 1.814,61 - 1.728,20 = 1.645,90$$

Momento 7:

$$J_7 = 10.000,00 \times 5\% \times 1,05^6 - 1.728,20 \times (1,05^6 - 1)$$

$$J_7 = 670,05 - 587,75 = 82,30 \text{ ou}$$

$$J_7 = SD_6 \times 5\% = 1.645,90 \times 5\% = 82,30$$

$$PV_6: 10.000,00 \times 1,05 = 10.500,00 \times 1,05 = 11.025,00 \times 1,05 = 11.576,25 \times 1,05 = 12.155,06 \times 1,05 = 12.762,82 \times 1,05 = 13.400,96 \times 1,05 = 14.071,00$$

$$PMT_1: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61 \times 1,05 = 1.905,33 \times 1,05 = 2.000,61 \times 1,05 = 2.100,64 \times 1,05 = 2.205,67 \times 1,05 = 2.315,93$$

$$PMT_2: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61 \times 1,05 = 1.905,33 \times 1,05 = 2.000,61 \times 1,05 = 2.100,64 \times 1,05 = 2.205,67$$

$$PMT_3: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61 \times 1,05 = 1.905,33 \times 1,05 = 2.000,61 \times 1,05 = 2.100,64$$

$$PMT_4: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61 \times 1,05 = 1.905,33 \times 1,05 = 2.000,61$$

$$PMT_5: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61 \times 1,05 = 1.905,33$$

$$PMT_6: 1.728,20 \times 1,05 = 1.814,61$$

$$PMT_7: 1.728,20 \times 1,00 = 1.728,20$$

$$SD_7 = 14.071,00 - 2.315,93 - 2.205,67 - 2.100,64 - 2.000,61 - 1.905,33 - 1.814,61 - 1.728,20 = 0,00$$

Pode-se analisar o comportamento dos juros de forma mais detalhada, tal como se fosse uma tomografia.

O juro de cada período, a partir do primeiro, mediante aplicação da taxa capitalizada de forma composta, resultará da diferença entre:

a) O juro incidente sobre o valor presente atualizado até o período anterior, mediante aplicação da taxa capitalizada de forma composta;

b) O somatório dos juros vencidos incidentes sobre o valor das prestações, todos atualizados até o período em análise.

$$J_1 = [PV_{0 \rightarrow m} - (\sum PMT_{1 \rightarrow m} + \sum J_{1 \rightarrow m})] \cdot i\%$$

Momento 1:

Em PV_0 : $10.000,00 \times 5\% = 500,00$, sem ocorrência de juros vencidos

Em J_1 : $1.728,20 \times 0\% = 0,00 \times 5\% = 0,00$

$500,00 - 0,00 = 500,00$

Momento 2:

Em PV_1 : $10.500,00 \times 5\% = 525,00$

Em J_1 : $1.728,20 \times 5\% = 86,41$

Em J_2 : $1.728,20 \times 0\% = 0,00$

$525,00 - 86,41 - 0,00 = 438,59$

Momento 3:

Em PV_2 : $11.025,00 \times 5\% = 551,25$

Em J_1 : $1.728,20 \times 5\% = 86,41$

Juro de J_1 : $86,41 + 5\% = 90,73$

Em J_2 : $1.728,20 \times 5\% = 86,41$

Em J_3 : $1.728,20 \times 0\% = 0,00$

$551,25 - 90,73 - 86,41 - 0,00 = 374,11$

Momento 4:

Em PV_3 : $11.576,25 \times 5\% = 578,81$

Em J_1 : $1.728,20 \times 5\% = 86,41$

Juro de J_1 : $86,41 + 5\% = 90,73$

Juro do juro de J_1 : $90,73 + 5\% = 95,27$

Em J_2 : $1.728,20 \times 5\% = 86,41$

Juro de J_2 : $86,41 + 5\% = 90,73$

Em J_3 : $1.728,20 \times 5\% = 86,41$

Em J_4 : $1.728,20 \times 0\% = 0,00$

$578,81 - 95,27 - 90,73 - 86,41 - 0,00 = 306,41$

Momento 5:

$$PV_4: 12.155,06 \times 5\% = 607,75$$

$$J_1: 1.728,20 \times 5\% = 86,41$$

$$\text{Juro de } J_1: 86,41 + 5\% = 90,73$$

$$\text{Juro do juro de } J_1: 90,73 + 5\% = 95,27$$

$$\text{Juro do juro do juro de } J_1: 95,27 + 5\% = 100,03$$

$$J_2: 1.728,20 \times 5\% = 86,41$$

$$\text{Juro de } J_2: 86,41 + 5\% = 90,73$$

$$\text{Juro do juro de } J_2: 90,73 + 5\% = 95,27$$

$$J_3: 1.728,20 \times 5\% = 86,41$$

$$\text{Juro de } J_3: 86,41 + 5\% = 90,73$$

$$J_4: 1.728,20 \times 5\% = 86,41$$

$$J_5: 1.728,20 \times 0\% = 0,00$$

$$607,75 - 100,03 - 95,27 - 90,73 - 86,41 - 0,00 = 235,32$$

Momento 6:

$$PV_5: 12.762,82 \times 5\% = 638,14$$

$$J_1: 1.728,20 \times 5\% = 86,41$$

$$\text{Juro de } J_1: 86,41 + 5\% = 90,73$$

$$\text{Juro do juro de } J_1: 90,73 + 5\% = 95,27$$

$$\text{Juro do juro do juro de } J_1: 95,27 + 5\% = 100,03$$

$$\text{Juro do juro do juro do juro de } J_1: 100,03 + 5\% = 105,03$$

$$J_2: 1.728,20 \times 5\% = 86,41$$

$$\text{Juro de } J_2: 86,41 + 5\% = 90,73$$

$$\text{Juro do juro de } J_2: 90,73 + 5\% = 95,27$$

$$\text{Juro do juro do juro de } J_2: 95,27 + 5\% = 100,03$$

$$J_3: 1.728,20 \times 5\% = 86,41$$

$$\text{Juro de } J_3: 86,41 + 5\% = 90,73$$

$$\text{Juro do juro de } J_3: 90,73 + 5\% = 95,27$$

$$J_4: 1.728,20 \times 5\% = 86,41$$

$$\text{Juro de } J_4: 86,41 + 5\% = 90,73$$

$$J_5: 1.728,20 \times 5\% = 86,41$$

$$J_6: 1.728,20 \times 0\% = 0,00$$

$$638,14 - 105,03 - 100,03 - 95,27 - 90,73 - 86,41 - 0,00 = 160,67$$

Momento 7:

$$PV_6: 13.400,96 \times 5\% = 670,05$$

$$J_1: 1.728,20 \times 5\% = 86,41$$

$$\text{Juro de } J_1: 86,41 + 5\% = 90,73$$

$$\text{Juro do juro de } J_1: 90,73 + 5\% = 95,27$$

$$\text{Juro do juro do juro de } J_1: 95,27 + 5\% = 100,03$$

$$\text{Juro do juro do juro do juro de } J_1: 100,03 + 5\% = 105,03$$

$$\text{Juro do juro do juro do juro do juro de } J_1: 105,03 + 5\% = 110,28$$

$$J_2: 1.728,20 \times 5\% = 86,41$$

$$\text{Juro de } J_2: 86,41 + 5\% = 90,73$$

$$\text{Juro do juro de } J_2: 90,73 + 5\% = 95,27$$

$$\text{Juro do juro do juro de } J_2: 95,27 + 5\% = 100,03$$

$$\text{Juro do juro do juro do juro de } J_2: 100,03 + 5\% = 105,03$$

$$J_3: 1.728,20 \times 5\% = 86,41$$

$$\text{Juro de } J_3: 86,41 + 5\% = 90,73$$

$$\text{Juro do juro de } J_3: 90,73 + 5\% = 95,27$$

$$\text{Juro do juro do juro de } J_3: 95,27 + 5\% = 100,03$$

$$J_4: 1.728,20 \times 5\% = 86,41$$

$$\text{Juro de } J_4: 86,41 + 5\% = 90,73$$

$$\text{Juro do juro de } J_4: 90,73 + 5\% = 95,27$$

$$J_5: 1.728,20 \times 5\% = 86,41$$

$$\text{Juro de } J_5: 86,41 + 5\% = 90,73$$

$$J_6: 1.728,20 \times 5\% = 86,41$$

$$J_7: 1.728,20 \times 0\% = 0,00$$

$$670,05 - 110,28 - 105,03 - 100,03 - 95,27 - 90,73 - 86,41 - 0,00 = 82,30$$

Assim, resta comprovado que o Método Price contempla a capitalização de juros na forma composta, pois todos os resultados obtidos se originam da prática de juros sobre juros, anatocismo.

À luz da melhor técnica, quaisquer argumentos em contrário se constituem em séria afronta aos mais basilares princípios da Matemática, podendo se caracterizar como disparates, mistificação e deturpação de conceitos, até mesmo má-fé científica.

CONTRADITA AOS ARGUMENTOS DA OCORRÊNCIA DE JUROS SIMPLES OU NÃO OCORRÊNCIA DE ANATOCISMO, NA TABELA PRICE

Em análise de diversas obras que abordam a temática de capitalização de juros compostos, verifica-se muitas afirmações que não se sustentam, pois sem fundamentos técnicos, e não provadas.

“A Tabela Price ou Sistema Francês de Amortização não se baseia no regime de juro composto, ou não se reproduz por anatocismo, porque, na medida em que se paga a parcela, liquida-se o juro embutido, não havendo incorporação do juro ao saldo devedor remanescente.”

“A Tabela Price não possui função exponencial; ou a equação que determina a prestação na Tabela Price tem expoente, mas isso não tem nada a ver com juros compostos e não capitaliza. Taxa sobre taxa não é o mesmo que juro sobre juro”.

“A soma das parcelas de juros e amortização comparada com o capital inicial significa que não há capitalização composta de juros”.

“A tabela Price é um regime de juros simples, porque os juros são calculados através da multiplicação da taxa de juros pelo saldo devedor do período anterior. ... As parcelas mensais são formadas por juros simples, incidentes sobre o capital não incorporado de juros e amortização; e que os valores das cotas de juro não são incorporados ao capital, representando juros simples.”

Sob a pena de incorrer em análise rasa da questão, não há como concordar com meras afirmações, porque não provadas e desprovidas de respaldo técnico, e se constituem em equívocos, certamente.

No mínimo, observa-se a ocorrência de confusão semântica.

Tais afirmações deturpam o conceito de anatocismo, que nada mais é do que a incidência de juros sobre juros.

É totalmente incongruente afirmar que se utiliza juros compostos, mas isso não significa capitalização composta.

Se a sistemática expressa a prática de juros sobre juros, que são agregados gradativa e cumulativamente ao saldo devedor, é claro e insofismável que se configura o anatocismo.

Restou claro que o expoente nas fórmulas expressa a operação de potenciação no desenvolvimento das equações do Método Price, significando a capitalização composta de juros, anatocismo, juros sobre juros, juros compostos.

Os juros capitalizados já estão incorporados no valor de cada uma das prestações.

Repete-se: a incorporação de juros a um determinado capital sempre caracterizará capitalização, simples ou composta.

Sem clara e inequívoca demonstração em contrário (Juros simples? Juros sobre juros sem capitalização composta?), confirma-se, mais uma vez, que “O óbvio é a verdade mais difícil de ser vista ou aceita”.

A mera soma de valores nominais relativos a momentos diferentes é um erro conceitual, pois a Matemática Financeira somente admite a comparação ou o processamento de valores se estiverem na mesma data focal. Dois números de igual valor nominal, em momentos diferentes, não representam a mesma grandeza efetiva, uma vez que somente podem ser comparados ou processados se estiverem no mesmo momento.

Apurar médias destes valores também não atende aos preceitos da Matemática Financeira.

Extraído o percentual de juros compostos embutidos em cada parcela obtém-se o capital.

Em Matemática, a nossa capacidade de compreensão é inversamente proporcional à complexidade do conceito, ou seja, quanto mais elementar um conceito mais difícil é o seu entendimento.

Não se pode admitir dissecar a matéria de forma rasa ou simplista. É preciso analisar as entranhas. Não basta analisar os sintomas, mas se deve ir em busca da origem e das causas do fenômeno.

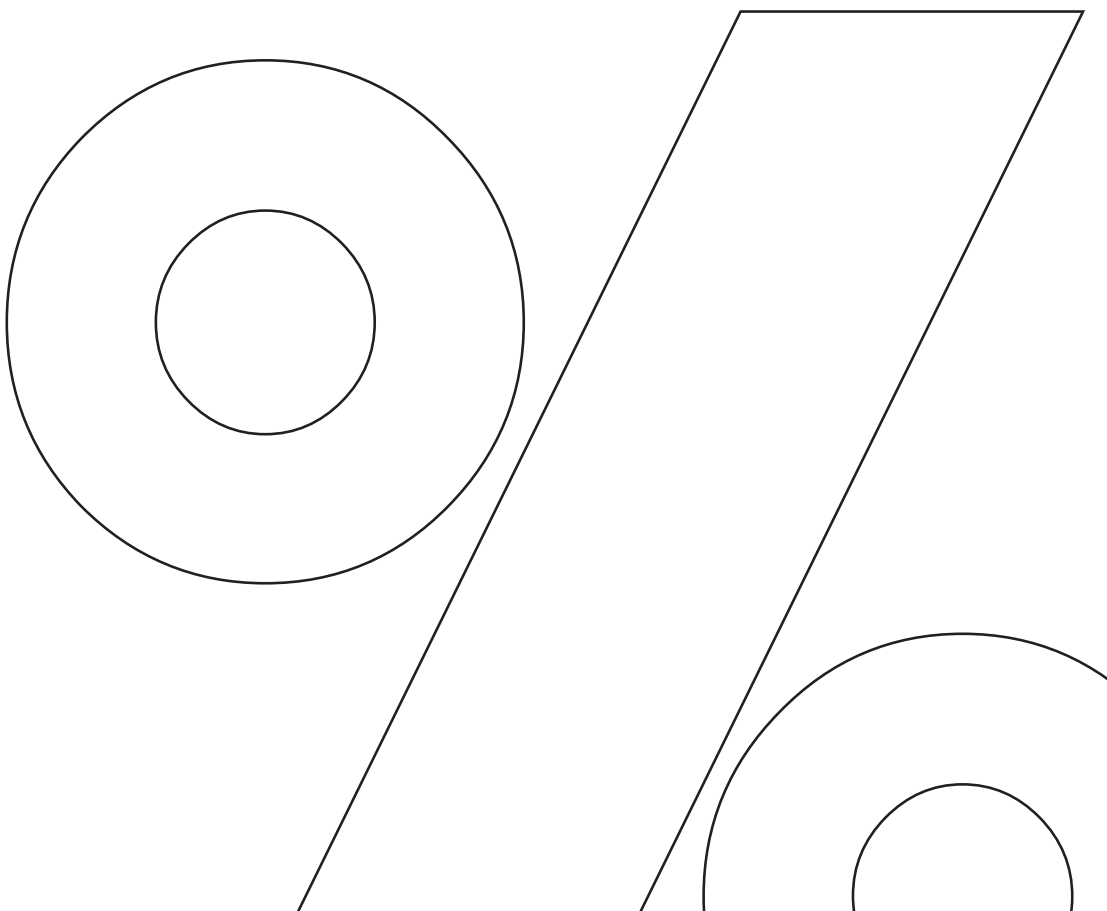
Escrever para usuários ou estudantes não é a mesma coisa que fazer análise científica para pesquisadores, mestres e peritos.

A ciência está acima do mero negacionismo e da vontade humana de subverter a lógica para atender conveniências.

Então, não há como admitir que se enverede pela anarquia matemática, em que alguns criam suas próprias leis, à revelia de princípios básicos, para meramente se declararem com a razão, e, de tanto repetirem seus falsos mantras ou bordões sem fundamento, acabam convencendo ou iludindo leigos e letrados.

CAPÍTULO 27

A POLÊMICA SOBRE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA DE JUROS, SIMPLES E COMPOSTOS



A POLÊMICA SOBRE CAPITALIZAÇÃO DE JUROS, SIMPLES E COMPOSTOS

“A gente consome muita coisa ‘pronta’, por falta de tempo ou preguiça”. (Armandinho, cartunista)

“Quando enfrentam o que seu passado não as preparou para enfrentar, as pessoas tateiam em busca de palavras para dar nome ao desconhecido, mesmo quando não podem defini-lo nem entendê-lo”.

(Eric Hobsbawn, 1998, Era dos Extremos).

Sempre que se rotula algo ou alguém, sem conhecimento mais acurado, corre-se o risco de cometer enganos, alimentar sofismas, realizar análises deturpadas e concluir equivocadamente.

De há muito, informações falsas são divulgadas como verdades, tal qual fossem fatos consumados, mas foi com o advento das redes sociais que as “*fake news*” se popularizaram, causando enormes problemas.

Quanto mais repetida a informação inverídica, maior a vulnerabilidade do destinatário e, por extensão, a chance de outros serem influenciados.

A maneira mais efetiva de diminuir o impacto das “*fake news*” é cada um fazer a sua parte, buscando o devido esclarecimento, e compartilhando somente aquilo que tem certeza ser verdadeiro.

Impõe-se erradicar esta prática funesta.

Aceitar passivamente as “verdades prontas”, o “sempre foi assim” (ou “nunca foi assim”), sem adotar práticas corretas e seguras, também concorre para se deixar de compreender e elucidar a realidade fática.

Quando o inaceitável e o inadmissível ocorrem, é preciso respostas convincentes e até contundentes.

Submetidos à investigação consistente e abalizada, falsos dogmas, meias verdades ou mentiras inteiras podem ser desmentidas

Assim, também, na Matemática Financeira, principalmente quando utilizada no plano concreto, no mundo real dos contratos, impõe-se que as “verdades incontestáveis” prevaleçam, através da necessária e adequada comprovação.

Todo o presente estudo se baseou nos conceitos de juros simples e juros compostos, e nas diferentes formas de capitalização de juros, com base em postulados puramente matemáticos.

De forma consistente, silogística e inequívoca, restou comprovada a congruência, respectivamente, dos juros simples com as progressões aritméticas, e dos juros compostos com as progressões geométricas.

Cabe relembrar que, em progressão aritmética (juros simples), a operação é a “soma” de um fator fixo, taxa de crescimento denominada razão, enquanto, em progressão geométrica (juros compostos), utiliza-se a “multiplicação”.

Restaram demonstradas as sistemáticas de amortização de financiamentos sob a ótica dos juros compostos e, também, dos juros simples.

Foi possível concluir que todo e qualquer método de amortização em que incida a mesma taxa de juros sobre o saldo devedor do período imediatamente anterior é um regime de juros compostos, ou seja, é verificada a cobrança de juros sobre juros (anatocismo).

O enfoque inadequado e o uso incorreto das operações implicam em equívocos de análise, procedimentos e conclusão dos resultados obtidos.

Observando os resultados obtidos mediante aplicação dos postulados das progressões geométricas, verifica-se que a base teórica do regime de Capitalização por Juros Compostos (CJC) se coaduna perfeitamente com o Sistema Francês de Amortização – SFA, ou Tabela Price, que prefiro denominar MQJC – Método de Quitação a Juros Compostos.

O entendimento de que há incidência de juros compostos neste método é majoritário, praticamente unânime, entre célebres e renomados especialistas, expresso na Declaração em Defesa de uma Ciência Matemática e Financeira (Sindecon SP 2004 www.sindecon-esp.org.br): Ademar Campos Filho (SP), Ademir Clemente (UFPR), Alexandre Assaf Neto (USP), Antonio Carlos Lopes (PUC SP), Antonio Cordeiro Filho (PUC SP), Armando José Tosi (SP), Carlos Roberto Vieira Araújo (UNIFEI SP), Clóvis de Faro (FGV RJ), José Dutra Vieira Sobrinho (SP), José Nicolau Pompeo (PUC SP / USP), José Maria Gomes (SP), Samuel Hazzan (FGV e PUC SP), Udibert Reinoldo Bauer (FURB SC), Walter de Francisco (UNIMEP SP), Washington Franco Mathias (USP), e Wilson Villanova (PUC SP). E ainda outros acreditados

professores, pesquisadores e autores de obras sobre Matemática Financeira: Luiz Álvaro Ferreira Cavaleiro, José Jorge Meschiatti Nogueira, Edson Rovina, Anísio Costa Castelo Branco, Remo Dalla Zanna, e Alcio Manoel de Figueiredo.

Esta também é a convicção da Câmara de Perícia do SESCAP, do Paraná, e da Business School FAE, dentre outras instituições acreditadas no tema.

Mesmo que desde o nascedouro deste método de amortização tenha sido afirmado que o sistema utiliza juros compostos ou capitalização de juros, ainda há quem defenda, equivocadamente, a inexistência de cobrança de juros sobre juros, ou anatocismo, em PRICE ou MQJC.

Para efeito de quitação do financiamento, em PRICE ou MQJC, relevante é o valor da prestação periódica (série uniforme).

Mediante juros compostos, e sob determinada taxa de juros, a partir do valor financiado, se, no momento “n”, o valor futuro obtido é equivalente à soma do valor atualizado das prestações periódicas obtidas pelo PRICE ou MQJC, também a juros compostos, não há como negar a obviedade.

“Os cétricos podem até escondê-lo, mas negá-lo é o mesmo que se afirmar que água do mar é salgada, mas não contém sal”.

(Prof. José Jorge Meschiatti Nogueira).

Os juros compostos já estão embutidos na prestação periódica, que é calculada em progressão geométrica, mediante utilização da função exponencial contida na fórmula geral, capitalização composta, taxa sobre taxa.

Da primeira até a última, a prestação permanece inalterada e o saldo devedor somente deduz a cota de amortização respectiva, mas nunca o juro que foi pago.

Esta questão é, foi e ainda é maior polêmica das últimas décadas em Matemática Financeira, com profundos e importantes reflexos em processos judiciais.

Quanto à equivalência do termo ANATOCISMO com as expressões “juros sobre juros”, “capitalização composta de juros”, “juros progressivos”, já era positivada por matemáticos, autoridades monetárias e tribunais brasileiros.

A propósito, restou consagrado este entendimento no debate havido no I Congresso Brasileiro de Perícia Bancária (18 e 19/9/2020; disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=ELx-dNZHclI>), que reuniu os professores Edilson Aguiar, José Dutra Vieira Sobrinho e Anísio Costa Castelo Branco, além do autor desta obra, Alceu André Hübbe Pacheco.

Concluindo: em PRICE ou MQJC, há anatocismo, juros sobre juros!!!

Por outro lado, observando os resultados obtidos com os juros simples, mediante aplicação dos postulados das progressões aritméticas, verifica-se que **a base teórica do regime de Capitalização por Juros Simples (CJS) coincide e se fundamenta no Método do Índice Ponderado ou Critério da Soma dos Dígitos.**

O já citado José Dutra Vieira Sobrinho afirma que “o critério linear ponderado consiste na distribuição dos encargos globais proporcionalmente ao valor dos saldos devedores representados por prestações a vencer existentes no início de cada período”.

Diz ainda: o critério da soma dos dígitos, “que é largamente utilizado em diversos países, nada mais é do que um caso particular do critério linear ponderado quando as prestações são iguais, periódicas (mensais, trimestrais, semestrais, anuais, etc.) e consecutivas”, “consiste na divisão do total dos juros ou encargos pelo somatório dos prazos (expressos por dígitos representativos do número de meses a decorrer), correspondentes a cada prestação, sendo o resultado dessa divisão multiplicado pelos respectivos prazos, considerados na ordem inversa”.

Esclarece que se trata de um sistema construído com base no conceito de juros simples, inspirado nas mesmas regras que norteiam a construção de um método baseado em juros compostos.

A capitalização simples acumula juros a cada período, sob as leis das progressões aritméticas.

Impõe-se esclarecer, neste ponto, que **não há lei matemática que obrigue os empréstimos sob juros simples serem resgatados somente mediante um único pagamento ao final.**

Assim, é plenamente possível o pagamento gradativo mediante prestações periódicas em série uniforme.

Por exemplo, se uma decisão judicial determina que um empréstimo a ser resgatado originalmente em prestações iguais sob juros compostos seja convertido para juros simples. Ou ainda a hipótese de um empréstimo entre particulares, a ser pago em parcelas periódicas iguais entre si, em que o financiador não seja instituição vinculada ao Sistema Financeiro Nacional, não podendo, assim, aplicar juros compostos, mas somente juros simples.

O valor total pago em série uniforme de prestações iguais é exatamente igual ao pagamento único, ao final, do principal mais juros.

Ou seja, o mutuário paga as prestações periódicas, de forma que a soma dos juros, ao final, seja exatamente igual ao que pagaria se o capital emprestado devesse ser devolvido de uma só vez, no final do prazo, juntamente com os juros.

Convergem com a mesma linha de ideias os também já citados Luiz Cavaleiro, Luiz Gomes de San Thiago / Rodolpho Baptista de San Thiago, Meschiatti Nogueira, Edson Rovina, Alcio Figueiredo, Remo Dalla Zanna e Anísio Castelo Branco.

Mas, tendo em vista, a necessidade de que os saldos devedores intermediários sejam efetivos, a partir do cálculo das cotas de juros e de amortização contidas em cada prestação, segundo as cláusulas péticas da *lex mater* da Matemática Financeira, desenvolvi o **SIMPLEX** ou **MQJS – MÉTODO DE QUITAÇÃO A JUROS SIMPLES**.

Assim, em contraposição ao MQJC, que utiliza juros compostos (ou capitalizados: anatocismo), e se baseia na soma dos termos de uma progressão geométrica (crescimento exponencial, mediante potenciação da taxa de juros), a única alternativa para amortização de um determinado montante ou valor futuro (FV), obtido a partir de um capital ou valor presente (PV) a uma determinada taxa de juros ($i\%$), que será pago num prazo (n), mediante uma série uniforme de prestações (PMT) postecipadas (ao final de cada um dos períodos de mesma duração), sucessivas e de valores constantes e iguais entre si, agregando capital e juros em cada prestação, e que, no final do prazo, seja paga a totalidade de capital mais juros, de forma linear, dentro do regime de juros simples, é o **SIMPLEX** ou **MQJS – MÉTODO DE QUITAÇÃO A JUROS SIMPLES**, que se baseia na soma dos termos de uma progressão aritmética (crescimento linear, mediante multiplicação da taxa de juros).

Conforme visto anteriormente, a juros simples o capital inicial PV de R\$ 10.000,00, aplicado à taxa $i\%$ de 5% ao período, em prazo n de 7 períodos, resulta no valor futuro FV R\$ 13.500,00. A juros compostos, FV de R\$ 14.071,00. A diferença paga a mais a juros compostos é de R\$ 571,00.

A prestação periódica que amortiza integralmente o financiamento, a juros simples, é de R\$ 1.677,02. A juros compostos, R\$ 1.728,20.

Assim, se as prestações obtidas a juros compostos, de R\$ 1.728,20, forem transportadas ao último momento “ n ”, a diferença entre o valor futuro obtido a juros simples, R\$ 13.500,00, e a soma destas prestações não é igual a zero, mas de (-) 571,00. Ou seja, as prestações a juros compostos atingem o valor futuro a juros simples antes do momento final “ n ”, sendo mais do que suficientes do que o necessário.

MQJC

NUM PARC	Coefficiente a juros compostos	PMT a juros compostos	Valor da PMT no momento “ n ” JC	Saldo devedor a juros compostos	Saldo devedor a juros simples
0				14.071,00	13.500,00
1	1,340096	1.728,20	2.315,95	11.755,05	11.184,05
2	1,276282	1.728,20	2.205,67	9.549,39	8.978,38
3	1,215506	1.728,20	2.100,64	7.448,75	6.877,75
4	1,157625	1.728,20	2.000,61	5.448,14	4.877,14
5	1,102500	1.728,20	1.905,34	3.542,81	2.971,80
6	1,050000	1.728,20	1.814,61	1.728,20	1.157,19
7	1,000000	1.728,20	1.728,20	0,00	(571,00)

Por outro lado, se as prestações obtidas a juros simples, de R\$ 1.677,02, forem transportadas ao último momento “ n ”, a diferença entre o valor futuro obtido a juros compostos e a soma destas prestações não é igual a zero, mas de R\$ 571,00. Ou seja, as prestações a juros simples atingem o valor futuro a juros simples depois do momento final “ n ”, portanto, insuficientes para atingir o necessário.

MQJS						
NUM PARC	PRT	Coefficiente a juros simples	PMT a juros simples	Valor da PMT no momento "n" JS	Saldo devedor a juros simples	Saldo devedor a juros compostos
0	7				13.500,00	14.071,00
1	6	1,300000	1.677,02	2.180,12	11.319,88	11.890,88
2	5	1,250000	1.677,02	2.096,27	9.223,60	9.794,61
3	4	1,200000	1.677,02	2.012,42	7.211,18	7.782,18
4	3	1,150000	1.677,02	1.928,57	5.282,61	5.853,61
5	2	1,100000	1.677,02	1.844,72	3.437,89	4.008,89
6	1	1,050000	1.677,02	1.760,87	1.677,02	2.248,02
7	-	1,000000	1.677,02	1.677,02	(0,00)	571,00

Resta, mais uma vez comprovada, a capitalização composta de juros no MQJC.

Apesar destas evidências, alguns ainda persistem na polêmica.

Atualmente, mais do que nunca, há forte tendência da radicalização em torno das dualidades.

Prevalece o pensamento binário, sem respeito ao ponto de vista alheio, seja na filosofia, na política, no esporte, na economia. Sob este prisma, é 8 ou 80, contra ou a favor, o certo contra o errado! E nada mais...

Assim também tem ocorrido com a controvérsia juros simples versus juros compostos.

A problemática sobre incidência, ou não, de capitalização composta de juros em contratos de financiamento identificados com o MQJC acarretou realização de audiência pública no STJ – Superior Tribunal de Justiça, em 29/02/2016, para tentar dirimir as dúvidas existentes, pacificar o entendimento sobre o tema, e exarar a decisão elucidativa. Não houve conclusão definitiva sobre a controvérsia.

Entretanto, sempre haverá tempo e oportunidade para a prevalência da análise consistente e do bom senso.

Esta obra pretende ter contribuído para a elucidação das eventuais dúvidas ainda existentes.

Então, sem maiores delongas, diante das conclusões ora cientificamente apresentadas, é possível se afastar toda a polêmica existente,

e afirmar: **quando for necessário transformar prestações calculadas por juros compostos em prestações por juros simples, em casos de séries uniformes postecipadas, de valor fixo, o SIMPLEX ou MQJS – MÉTODO DE QUITAÇÃO A JUROS SIMPLES é a única alternativa que substitui o MQJC.**

Diante da exigência de segura demonstração das afirmações feitas, determinados preconceitos caem por terra, sendo possível entender melhor cada situação e processo.

É o que se pretendeu com este estudo.

“O óbvio é a verdade mais difícil de enxergar”.
(Clarice Lispector)

Cabe ainda concluir: os sistemas a juros compostos, Price, SAC, SAM e SAA, “fecham”, período a período quanto às parcelas, cotas de juros e de principal em cada parcela, e, também, sob o prisma da equivalência de fluxos de caixa, quanto aos efetivos saldos devedores intermediários e, logicamente, ao saldo final zero.

Os sistemas a juros simples Gauss, SAC-JS e MQJS, também “fecham” quanto às parcelas ao final, com saldo zero, com base no valor das parcelas, conforme suas respectivas proposições.

Mas somente SIMPLEX ou MQJS “fecha” também quanto aos efetivos saldos devedores intermediários e, logicamente, ao saldo final zero, uma vez aplicada a equivalência de fluxos de caixa.

Ou seja, quanto às cotas de juros e de principal/amortização contidas em cada parcela, e, conseqüentemente, os saldos devedores intermediários, Gauss e SAC-JS apresentam saldos devedores intermediários menores do que os saldos efetivos.

Esta, certamente, é uma grande inovação na literatura técnica sobre Matemática Financeira, que forçosamente terá que ser reescrita e aplicada quanto a este ponto, em relação a MQJS, Gauss e SAC-JS.

O que se fez foi a aplicação de regra basilar, de que “dois valores somente podem ser comparados ou processados se estiverem no mesmo momento”.

Não se trata de nenhuma grande descoberta matemática, mas apenas o resultado da observação vigilante do pedreiro se aliou à ciência do mestre e do arquiteto.

Assim, além deste estudo ter pretendido oferecer uma didática com vista a melhor entendimento sobre essa problemática (“juros simples versus juros compostos”), espera-se que também sejam de valia os inéditos procedimentos de cálculo da prestação uniforme sob capitalização anual e sob capitalização diária a juros simples.

Mas, principalmente, que seja útil e convincente a sugerida sistemática alternativa de cálculo dos saldos devedores pelos seus valores efetivos, reais, à luz da equivalência de fluxos de caixa, com reflexos nos valores das cotas de juros e de amortização contidas nas prestações.

No caso dos juros compostos, não há alteração em relação ao cálculo feito pelas PGs.

Por juros simples, em relação à construção feita pelas PAs, a nova sistemática SIMPLEX ou MQJS altera o cálculo das três verbas, que resulta em ligeiro incremento nos valores dos saldos devedores intermediários, tendo em vista o aumento do valor das cotas de juros e a diminuição das cotas de amortização.

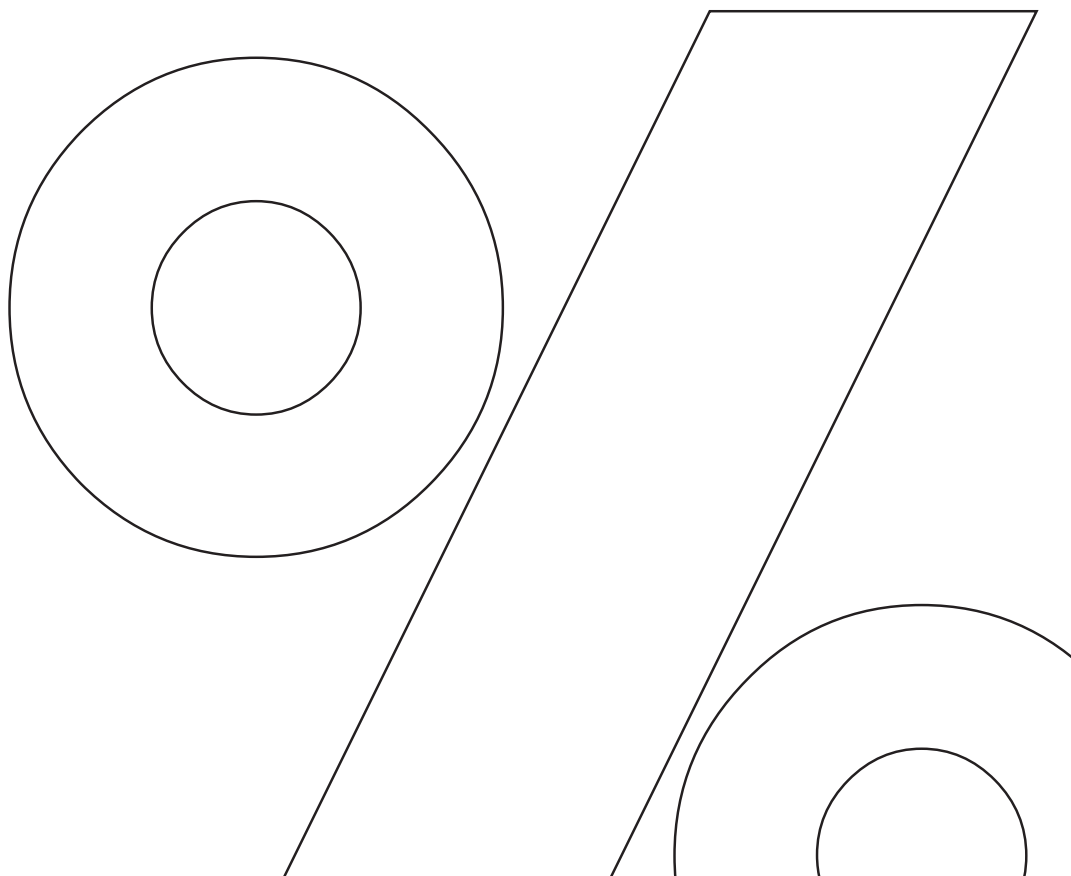
Assim, além de tudo o mais que foi demonstrado, que este seja o definitivo argumento para convencer os “descrentes” sobre a lógica e a aplicabilidade do SIMPLEX ou Método de Quitação a Juros Simples, em especial, agora, com o JQS – “Juro que é simples!”, que consiste na apuração dos saldos devedores intermediários pelo seu valor real, efetivo, em obediência à cláusula pétrea da Matemática Financeira, de que dois ou mais valores somente podem ser cotejados se estiverem atualizados para uma mesma data.

Se ainda perdurarem discordância e dúvidas por parte de qualquer dos respeitáveis leitores, fica feito o convite para que sejam expostas as ideias contrárias, no sentido de tentar desconstituir toda a construção lógica e silogística até aqui desenvolvida e apresentada. Mas que, sob pena de sumária e plena desconsideração, a contradita seja feita à luz de conceitos e demonstrativos matemáticos, amparados por sólidos, consistentes e didáticos fundamentos.

Repito: não é tão fácil, mas JURO QUE É SIMPLES!

ANEXO 1

PÓS-FACIO



POSFÁCIO

A Matemática Financeira é matéria de meu interesse desde a adolescência.

O primeiro contato com o tema “juro” foi ainda na 3.^a série do Curso Ginásial, em 1968, no Colégio Normal de Araranguá - SC, disciplina de Técnicas Comerciais. Depois, em 1971, no CADOP – Colégio Agrícola Daniel de Oliveira Paiva, em Cachoeirinha - RS.

O tema me despertou real e definitivo interesse, em 1974, através do magistério de Wilson Araújo Rosa, nos cursos de graduação em Administração Pública e de Empresas, na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em Porto Alegre. Também foi, importante fator de aprendizagem, o período em que ministrei aulas sobre o tema, na FUCRI, atual UNESC, de Criciúma – SC, entre 1979 e 1981.

Mas o que mais me instigou foram a experiência como perito judicial e assistente técnico, desde 1998, período que se seguiu aos anteriores 22 anos de atuação profissional como gestor administrativo-financeiro de diversos empreendimentos, desde 1976.

O aprendizado, que ora se tenta transmitir, foi gradativamente sedimentado, ao longo do tempo, através das preciosas lições dos inúmeros mestres, a maioria autores de diversas publicações sobre a matéria, constantes das referências bibliográficas.

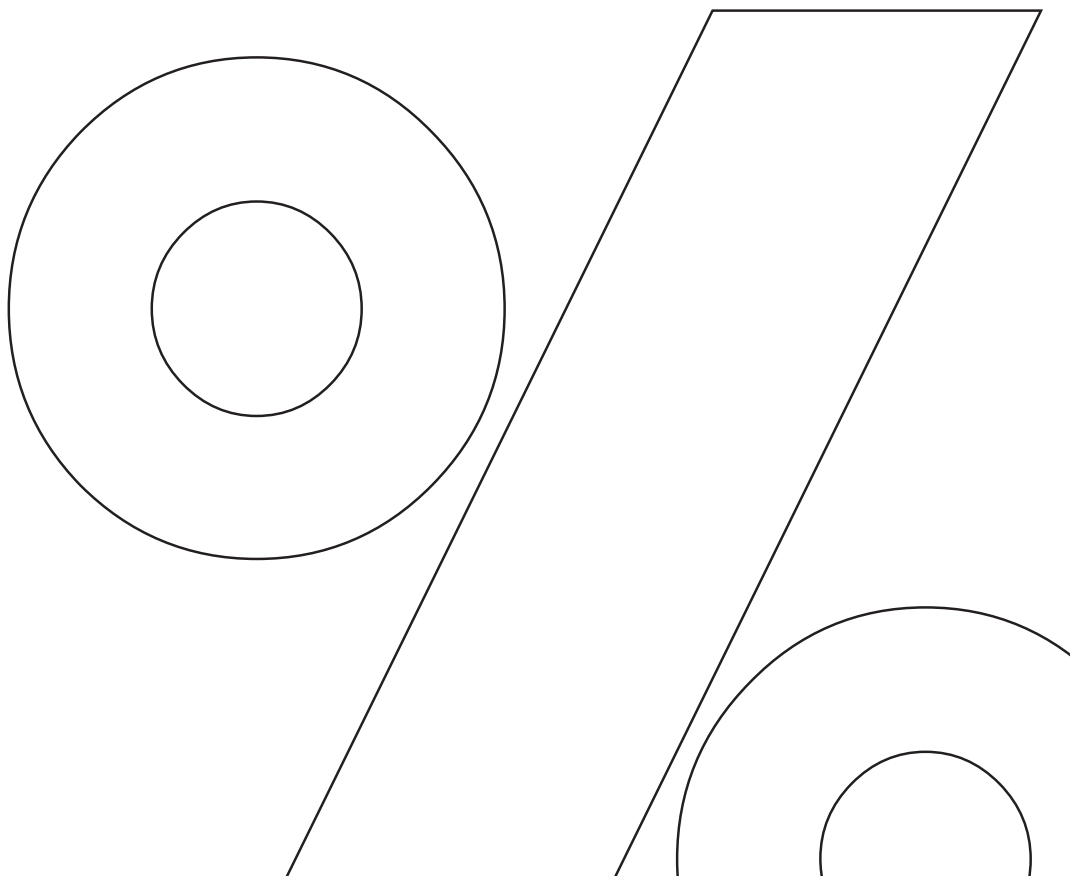
Da experiência de perito judicial em matéria financeira, idealizei o Método Pacheco González, sistemática primeiramente desenvolvida em planilhas eletrônicas, de forma empírica. Busquei o importante apoio de Gabriel Walter Gonzalez Bochetti, in memoriam, que fez o desenvolvimento algébrico e sintetizou a fórmula geral do cálculo do valor da prestação.

Gabriel era uruguaio, professor, mestre e doutor em Ciências Contábeis; auditor; especialista em custos industriais e orçamento; professor universitário da UNISUL – Universidade do Sul de Santa Catarina e da UNESC – Universidade do Extremo Sul de Santa Catarina.

A autoria conjunta do Método Pacheco González está devidamente arquivada no Cartório de Registro de Civil, Títulos e Documentos, e de Pessoas Jurídicas da Comarca de Araranguá – SC, protocolo 058812 e registro 056.318 (Livro B-217, folhas 214); na Fundação Biblioteca Nacional – Escritório de Direitos Autorais, Rio de Janeiro - RJ, sob o protocolo 47/2014-SC; além de outras formas de comprovação do ineditismo da sistemática.

ANEXO 2

BREVE CURRÍCULO



BREVE CURRÍCULO

Alceu André Hübbe Pacheco.

Naturalidade em Araranguá – SC.

Cursos primário, ginásial e científico nos Colégios Castro Alves, Normal/Estadual e Murialdo, em Araranguá - SC, e CADOP, em Cachoeirinha – RS.

Graduações em Administração Pública e de Empresas, na UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul; em Ciências Contábeis, na UNESC – Universidade do Extremo Sul Catarinense; e Direito, na UNISUL – Universidade do Sul de Santa Catarina.

Atividades profissionais: em Porto Alegre – RS, entre 1974 e 1978, em conglomerado financeiro, instituto de previdência social, grupo empresarial de engenharia e incorporações imobiliárias; em Criciúma – SC, entre 1978 e 1981, grupo empresarial nos ramos cerâmico, metalúrgico, rádio e televisão, telecomunicações e carbonífero, além de fundação educacional de ensino superior; em Araranguá – SC, entre 1981 e 1998, concessionárias e consórcios de veículos, loja comercial, indústria e comércio de madeira, e revenda de bebidas.

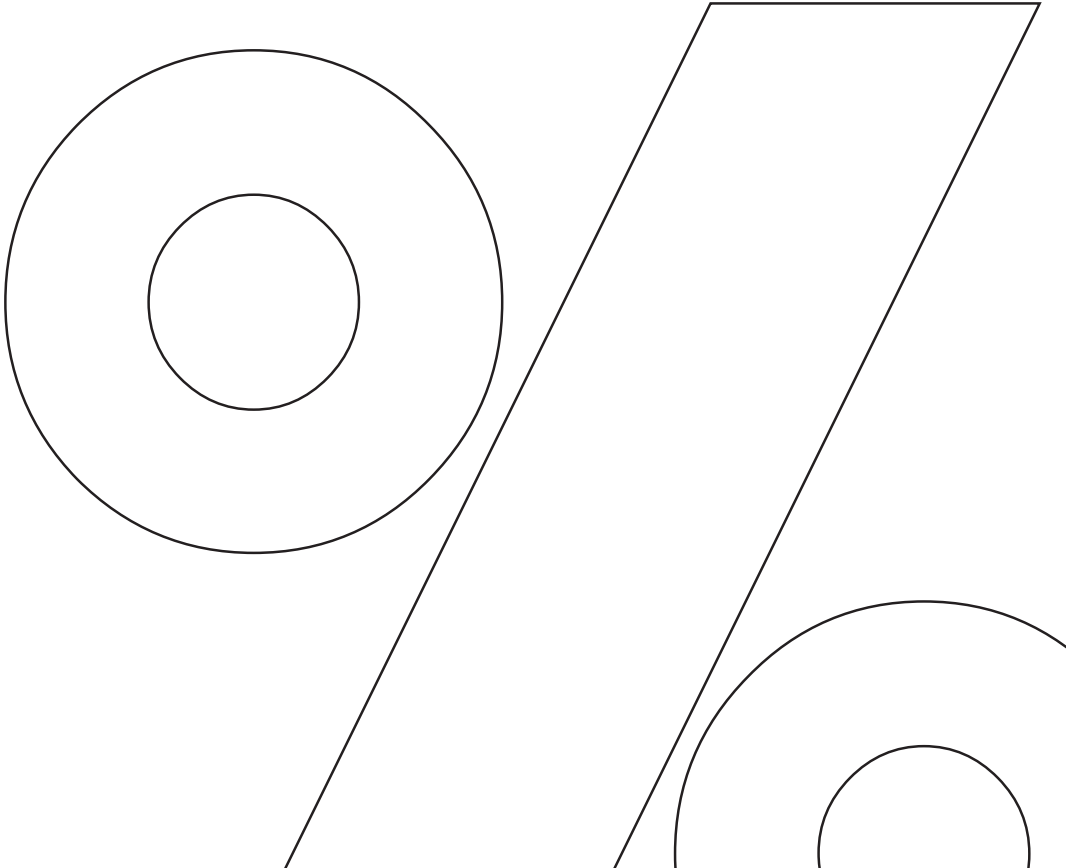
Participações em entidades de classe, associativistas, filosóficas e filantrópicas.

Desde 1998, em Araranguá e Litoral Sul de Santa Catarina, atuação como perito judicial e assistente técnico em matéria financeira, e presta consultoria empresarial e assessoria jurídica.

E-mail: alceu.pacheco@hotmail.com ou alceu.a.h.pacheco@gmail.com

Telefone / Whatsapp +55 (48) 996.566.905.

REFERÊNCIAS
BIBLIOGRÁFICAS



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARVALHO, Thales Mello. Matemática Comercial e Financeira: complementos de matemática, FENAME, Rio de Janeiro, 5.^a edição, 1980.

LAMENZA, Mario. Tábuas Financeiras. “Escolar”. F. Briguet & Cia. Editores, Rio de Janeiro, 7.^a edição, 1971 (1.^a edição, 1951).

ROSA, Wilson Araújo e ALFARO, Agostinho Altair. Tabela Financeira. Porto Alegre: Sulina, 1971.

VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. Matemática Financeira, Ed. Atlas, São Paulo, 1.^a edição, 1981.

CAVALHEIRO, Luiz Álvaro Ferreira. Elementos de Matéria Financeira. 6.^a Edição. Rio de Janeiro: Editora da FGV, 1983.

SAN THIAGO, Luiz Gomes de. Matemática Comercial e Financeira. Obra póstuma de Rodolpho Baptista de San Thiago. 2.^a edição revista e ampliada. São Paulo: Salesianas, 1948.

NOGUEIRA, José Jorge Meschiatti. Tabela Price, Mitos e Paradigmas. 2.^a Edição. Campinas: Millenium, 2008.

NOGUEIRA, José Jorge Meschiatti. Tabela Price, Mitos e Paradigmas. 3.^a Edição. Campinas: Millenium, 2013.

NOGUEIRA, José Jorge Meschiatti. Tabela Price. Da prova documental e precisa elucidação de seu anacismo. Campinas: Servanda, 2002.

ROVINA, Edson. Uma Nova Visão da Matemática Financeira. 1.^a Edição. Campinas: Millenium, 2009.

ROVINA, Edson. Uma Nova Visão da Matemática Financeira. 2.^a Edição (póstuma). Campinas: Clube de Autores, 2019/2020.

CASTELO BRANCO, Anísio Costa. Matemática Financeira Aplicada. 3.^a Edição. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

CASTELO BRANCO, Anísio Costa. Matemática Financeira Aplicada. 4.^a Edição revista e ampliada. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

DALLA ZANNA, Remo. Perícia Contábil em Matéria Financeira. 1ª Edição. São Paulo: IOB, 2008.

FIGUEIREDO, Alcio Manoel de Sousa. Tabela Price & Capitalização de Juros. 1ª Edição, 3ª reimpressão. Curitiba: Juruá, 2008.

FORGER, Frank Michael. Saldo Capitalizável e Saldo Não Capitalizável: Novos Algoritmos para o Regime de Juros Simples. Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, S.P., Brasil: 2009. Trabalho registrado junto à Fundação Biblioteca Nacional, sob o número 485.462; e-mail: forger@ime.usp.br

HOOG, Wilson Alberto Zappa. Prova Pericial Contábil. 15ª Edição. Curitiba: Juruá, 2018.

FRANCISCO, Walter de. Matemática Financeira. 4.ª edição. São Paulo: Atlas, 1980.

MATHIAS, Washington Franco e GOMES, José Maria. Matemática Financeira. São Paulo: Atlas, 1981.

MARTINS, Eliseu e ASSAF NETO, Alexandre. Administração Financeira. São Paulo: Atlas, 1986.

PUCCINI, Abelardo de Lima. Matemática Financeira. 2.ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 1983.

BAPTISTA, André Zanetti. Juros: taxas e capitalização. São Paulo: Saraiva, 2008. p. 51

CONSELHO NACIONAL DA JUSTIÇA – CNJ. Jornadas de direito civil I, III, IV e V: enunciados aprovados. Coordenador científico Ministro Ruy Rosado de Aguiar Júnior. – Brasília: CNJ, Centro de Estudos Judiciários, 2012. p. 19. In: <<http://www.cjf.jus.br/cjf/CEJ-Coedi/jornadas-cej/enunciados-aprovados-da-i-iii-iv-e-v-jornada-de-direito-civil/compilacaoenunciadosaprovados1-3-4jornadadircivilnum.pdf>>

DINIZ, Maria Helena. Dicionário Jurídico. Volume 1, 2ª Edição. São Paulo: Saraiva, 2005, p. 233

JAR E SILVA, Carlos Eduardo. Os juro legais na interpretação do Superior Tribunal de Justiça. Publicado em Janeiro de 2010. In: <<http://jus.com.br/artigos/14267/os-juros-legais-na-interpretacao-do-superior-tribunal-de-justica#ixzz2rXcKmc8W>>.

RIBEIRO DA SILVA, k. Juros Controlado ou Controlador. TCC de curso de graduação em Direito. Cuiabá: Universidade Estadual de Mato Grosso, 2009. p. 46.

SCAVONE JUNIOR, Luiz Antonio. Juros legais e sua limitação no Novo Código Civil. In: <<http://www.scavone.adv.br/index.php?juros-legais-e-sua-limitacao-no-novo-codigo-civil>>

SILVA, De Plácido e. Vocabulário Jurídico. 17ª Edição. Rio de Janeiro: Forense, 2000, p. 62.

