

Alceu André Hübbe Pacheco

**Autor de
“Juro que é simples!” e “Heureka! Descobertas e revelações”**

MATEMÁTICA FINANCEIRA DISRUPTIVA (MFD)

Juros simples e compostos. Anatocismo. Revelação dos códigos-fonte dos sistemas de amortização. Viabilidade dos juros simples e cindibilidade do prazo. Pentateuco V.D.T. Metodologia SIMPLEX.

1ª edição

Florianópolis - SC / Araranguá – SC

2026

AGRADECIMENTOS

Maristela Sasso Hübbe Pacheco
André Gabriel Sasso Pacheco
Angélica Sasso Pacheco

Gustavo dos Santos Mottola

Anderson Fumaux Mendes de Oliveira

José Dutra Vieira Sobrinho

André Luiz Dias de Mello.
Manoel Donisete de Sousa
Edio Kunhasky Júnior
Júlio César Correa Burigo (*in memoriam*)

Eli Oliveira Souza
Eduardo Ribeiro Manenti

Giovani Elias (*in memoriam*)
Giuseppe Perona (*in memoriam*)

Edson Rovina (*in memoriam*)
José Jorge Meschiatti Nogueira (*in memoriam*)

Amigos(as) e Irmãos

Colegas, alunos(as) e parceiros(as)

APRESENTAÇÃO

O Superior Tribunal de Justiça (STJ) precisa dar continuidade à audiência pública de 29/2/2016, sobre "capitalização de juros", pois perduram inúmeras pendências quanto ao famigerado tema.

São milhares de pareceres, laudos e decisões judiciais em que se declara (não) haver capitalização (composta; mensal) ou anatocismo na Tabela Price.

Tribunais de Justiça adotam diferentes entendimentos, e a incerteza se mantém. Enquanto isso, há mais de duas décadas, vigora a autorização legal para aplicar juros compostos diários e surgiram diversos métodos de amortização sobre os quais também há muita obscuridade.

Reina enorme polêmica entre especialistas, mestres, pós-graduados, doutores e pós-doutores em matemática e finanças; contadores, economistas, administradores, atuários, e até engenheiros; operadores do direito – magistrados, servidores e advogados; palestrantes renomados; autores de livros amplamente difundidos e artigos em revistas técnicas e redes sociais; acreditados professores de categorizadas universidades e fundações; alguns, inclusive, participantes da referida audiência pública.

Bibliografia e conteúdos programáticos precisam urgentemente ser revistos, corrigidos e atualizados.

O fato é que, contrariando o direito e ferindo a matemática, tem-se cometido graves equívocos e erros crassos ao analisar a questão, de interesse de milhões de brasileiros e que envolve cifras incalculáveis, não só no Direito Bancário, mas, também, nos financiamentos por instituições *não* financeiras, tais como construtoras, loteadoras e incorporadoras.

Há tumulto e precariedade no debate sobre juros simples e compostos, que, também, exclui os juros híbridos, ocorrência combinada dos dois regimes.

Embora alguns reconheçam que a Tabela Price acarreta a contagem de juros sobre juros, outros entendem que há somente juros simples sobre saldos devedores. Ou, ainda, negam a existência de anatocismo neste sistema de amortização.

Os sofismas variam, desde considerar o fenômeno como mera retórica, até afirmar que só ocorreria se houvesse amortização negativa ou inadimplência, neste caso, com acréscimo do impago ao saldo devedor.

Alguns negam a validade do regime de juros simples. Outros admitem, mas o fazem de forma inadequada, inclusive defendendo que é mais complicado do que o regime de juros compostos, e que até pode resultar prejudicial ao tomador do empréstimo. Dizem que conduz a resultados conflitantes com a matemática; que não tem consistência financeira.

Ou que, ao contrário da metodologia composta, os juros simples seriam calculados apenas proporcionalmente, e incorporados ao capital, tão somente, no vencimento do prazo, não admitindo fracionamento ou cindibilidade do prazo, entre valor presente e valor futuro, sem possibilidade de resgate com desconto em qualquer momento intermediário.

Cabe lembrar que os juros simples são sempre aplicáveis, quando não haja autorização legal e/ou expressa contratação de juros compostos.

Incrivelmente, encontra-se quem, ao mesmo tempo, refute e, também, admita a sistemática de juros simples, causando caos em seus leitores e adeptos. Quando admitem, tentam validar métodos inconsistentes, nomeados enganosamente como sendo sistemas lineares. Alternativa ou cumulativamente: apresentam diferentes soluções para o mesmo problema; ou não resistem ao mero teste de obrigatoria igualdade entre o valor futuro das prestações e o valor futuro do capital inicial; ou, se correto o valor das prestações, produz resultados errados quanto às cotas de juro e de amortização e aos saldos devedores intermediários. Há, ainda, quem tente explicar sistema de amortização de um capital inicial como se fosse equivalente a múltiplos contratos a partir de cada prestação, mas este expediente só valida o valor futuro das prestações, no momento final do prazo, e nada mais.

Por fim, há quem analise a questão apenas sob o prisma, único e equivocado, do valor das prestações descontado para o instante zero, mediante fatores impróprios, sem considerar que qualquer sistema é um todo integrado, e precisa ser consistente em todos os momentos do prazo, do início ao fim, e vice-versa.

Gize-se que, apesar de ainda haver aspectos controvertidos, em especial o anatocismo, os sistemas de amortização sob juros compostos são métodos consolidados que atendem perfeitamente às leis da Matemática Financeira tradicional. Mas há muita incerteza, jurídica e matemática, sobre os métodos a juros simples.

Édson Rovina, em seu livro “Uma Nova Visão da Matemática Financeira” (Editora Clube de Autores, Joinville, 2019), assinalou:

Pág. 16: ... a Matemática... nos cobra o perfeccionismo... não existe meio termo... ou é verdadeiro ou é falso... tudo pode ser refeito, exatamente igual, desde que aplicados os mesmos conceitos.

Pág. 17: ... Para a matemática usual, ... dois sempre é igual a dois, mas para a matemática financeira essa informação não é suficiente, pois, além de quantificar, ou seja, dizer que dois é igual a dois, é preciso situar o momento temporal...”. (Lei do Valor do Dinheiro no Tempo)

Pág. 19: ... ao explicarmos um conceito matemático de forma aplicada, perde-se a essência da coisa e, às vezes, se cria toda uma parafernália...”

Pág. 67: “... sempre partimos de um momento presente para, então, descobrir as coisas num futuro”.

Pág. 92: “Em matemática financeira, dois valores são iguais, se, e somente se, forem do mesmo valor nominal e estiverem na mesma data”. (Lei do Valor do Dinheiro no Tempo)

Após centenas de horas de estudos acurados e ampla pesquisa, constatei erros e ilogicidade.

Apesar de toda erudição e tecnicismo em inúmeros conteúdos, verifiquei descumprimento generalizado da regra básica da Matemática Financeira, a lei do valor do dinheiro no tempo, além das normas legais contidas nos artigos 354 (primazia dos juros) e 368 (compensação) do Código Civil.

Se é necessário contribuir com a sociedade, em especial o Poder Judiciário, para esclarecer e dirimir as dúvidas existentes há décadas, impõe-se prestigiar a verdade técnica, sem sofismas ou falácias.

Ousei enfrentar os pecados capitais cometidos, na verdade, tentativas de criar factoides, mediante artifícios dissociados da realidade concreta da Matemática Financeira, com o objetivo claro de criar narrativa contrária ao que é evidente.

Consegui “abrir a caixa preta” dos sistemas de amortização, revelar a gênese de diversos algoritmos, desvendar os códigos-fonte e/ou conceber a prova real dos métodos de quitação de financiamentos, com prestações postecipadas periódicas, de valor fixo, tanto a juros compostos como sob juros simples.

Talvez o maior equívoco que constatei foi que os sistemas de amortização são abordados e analisados sob uma ótica e perspectiva limitadas, sem considerar a integralidade do ciclo, desde o *input* (momento inicial, valor presente), *process* (momentos intermediários; prestações), *output* (prazo = momento final; valor futuro), e *feedback* (compatibilidade entre todos os elementos).

Para além “daquela opinião formada sobre tudo”, obtive êxito em demonstrar a existência inequívoca de anatocismo na Tabela Price, além da viabilidade e a cindibilidade ou fracionamento do prazo no regime de juros simples. Tudo especialmente alicerçado no Direito e na Matemática Financeira e seus postulados pétreos, em especial a lei do valor do dinheiro no tempo (VDT).

Há muito já se disse que o óbvio é a verdade mais difícil de ser vista, dita e feita.

Com a convicção de ter obtido soluções consistentes, algébrica e juridicamente, para que seja dado fim a esta problemática, visando exterminar *fake news* na perícia financeira, encerrar a polêmica, ou, pelo menos, lançar nova luz ao debate, desenvolvi o que denominei de “Matemática Financeira Disruptiva” (MFD), que inclui o Pentateuco VDT, conjunto de 5 fatores de autenticidade ou critérios de integridade de cada sistema de amortização, simples e/ou composto, de modo a comprovar sua (in)consistência.

Para os juros lineares, criei a Metodologia Simplex, que assegura a viabilidade concreta e a cindibilidade consistente do regime de juros simples.

Fiz descobertas. Revelei algumas, em publicações anteriores, que aprimorei. Desenvolvi novos conteúdos. Em alguns casos, busquei comprovações mediante prompt testados em ambiente de I. A. – Inteligência Artificial. Asseguro que são inovações disruptivas, soluções inéditas e eficazes, mediante teses lógicas, fatos inconteste, sólidos argumentos, justificativas plenas e demonstrações cabais.

O presente conteúdo abordará apenas os sistemas de amortização com prestações postecipadas constantes e periódicas, de valor fixo: Price, sob juros compostos; MQJS – Método de Quitação a Juros Simples – SIMPLEX, sob juros simples, em cotejo com os métodos Gauss e MEJS / SAL / SPCJS / SACS.

"Heureka!" "Juro Que É Simples!"

Alceu André Hübbe Pacheco
Agosto de 2026

PREFÁCIO

É com imensa honra e sincera satisfação que recebo o convite para prefaciar esta nova obra do Mestre e amigo Professor Alceu André Hübbe Pacheco, intitulada *Matemática Financeira Disruptiva*.

Ao longo de sua trajetória, o Professor Alceu tem sido um incansável investigador da verdade matemática e um provocador intelectual capaz de nos conduzir além dos limites tradicionais do conhecimento. Em suas obras anteriores — “Juro que é simples!” e “Heureka! Descobertas e Revelações” — já demonstrava que sua missão não era apenas ensinar, mas transformar a forma como compreendemos os conceitos financeiros e sua aplicação prática.

Nesta nova obra, Alceu vai além. Revela, com coragem e rigor científico, as inconsistências que por décadas alimentaram debates acadêmicos e controvérsias jurídicas, sobretudo em torno de temas como juros simples, compostos, anatocismo e sistemas de amortização. Com uma visão ousada e inovadora, abre a “caixa preta” da Matemática Financeira, desvendando códigos, algoritmos e fundamentos até então obscurecidos por abordagens convencionais.

A proposta de uma *Matemática Financeira Disruptiva* não se limita à crítica; ela traz soluções. O Pentateuco VDT, a Metodologia Simplex e as demonstrações que permeiam esta obra não apenas resgatam a fidelidade à Lei do Valor do Dinheiro no Tempo, mas também oferecem novos caminhos para peritos, contadores, advogados, magistrados e estudiosos que diariamente se deparam com a necessidade de interpretar corretamente fluxos financeiros e contratos complexos.

Ler estas páginas é ser instigado a repensar conceitos, rever convicções e aceitar que o óbvio, muitas vezes, é o mais difícil de ser enxergado. É, sobretudo, perceber que a verdadeira grandeza acadêmica se encontra na simplicidade com que se revela a essência da verdade.

Tenho plena convicção de que esta obra marcará época. Será referência obrigatória para todos aqueles que desejam compreender, com profundidade e clareza, a matemática que sustenta decisões financeiras, judiciais e empresariais.

Receber este livro é, portanto, mais que um privilégio intelectual: é um convite à reflexão crítica e à coragem de romper com paradigmas.

Ao Professor Alceu, registro minha admiração, respeito e gratidão pela amizade e pelo legado que deixa a todos nós.

Professor Anderson Fumaux

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - ANATOCISMO	9
CAPÍTULO 2 - PENTATEUCO VDT	10
CAPÍTULO 3 - FINANCIAMENTO PARA SER PAGO E QUITADO EM PARCELA ÚNICA AO FINAL DO PRAZO	12
CAPÍTULO 4 - FINANCIAMENTO PARA SER AMORTIZADO E QUITADO EM PRESTAÇÕES DE VALOR FIXO	17
CAPÍTULO 5 - CÁLCULO DA PRESTAÇÃO POSTECIPADA PERIÓDICA, COM VALOR FIXO, SOB JUROS COMPOSTOS	18
CAPÍTULO 6 - CÁLCULO DA PRESTAÇÃO POSTECIPADA PERIÓDICA, COM VALOR FIXO, SOB JUROS SIMPLES	23
CAPÍTULO 7 - EQUIVALÊNCIA ENTRE O VALOR FUTURO DO CAPITAL INICIAL E A SOMA DAS PRESTAÇÕES FIXAS “JURIFICADAS”, NO MOMENTO FINAL “M=N”.	28
Comprovação da equivalência entre o valor futuro e o fluxo de caixa das prestações, no momento “n”, sob juros compostos.	28
Comprovação da equivalência entre o valor futuro e o fluxo de caixa das prestações, no momento “n”, sob juros simples.	29
CAPÍTULO 8 - VALOR PRESENTE DAS PRESTAÇÕES FIXAS	30
Comprovação da equivalência entre o valor do capital inicial e o fluxo de caixa das prestações, no momento “0”, a juros compostos.	30
Comprovação da equivalência entre o valor do capital inicial e o fluxo de caixa das prestações, no momento “0”, a juros simples.	32
CAPÍTULO 9 - SALDOS DEVEDORES A CADA MOMENTO. ARTIGO 368 DO CÓDIGO CIVIL.	35
CAPÍTULO 10 - SALDOS DEVEDORES A JUROS COMPOSTOS	36
CAPÍTULO 11 - SALDOS DEVEDORES A JUROS SIMPLES	38
CAPÍTULO 12 - SALDOS DEVEDORES EM PROGRESSÕES	40
Saldos devedores a juros compostos, com base em progressões geométricas.	40
Saldos devedores a juros simples, com base em progressões aritméticas	42
CAPÍTULO 13 - COTAS DE JUROS NAS PRESTAÇÕES FIXAS. ARTIGO 354 DO CÓDIGO CIVIL.	45
CAPÍTULO 14 - COTAS DE JUROS COMPOSTOS NAS PRESTAÇÕES FIXAS	47
CAPÍTULO 15 - <i>GOLDEN PROOF</i> OU PROVA REAL: A DIFERENÇA ENTRE SALDOS DEVEDORES SOB JUROS COMPOSTOS	53
CAPÍTULO 16 - COTAS DE JUROS SIMPLES NAS PRESTAÇÕES FIXAS	54
CAPÍTULO 17 - <i>GOLDEN PROOF</i> OU PROVA REAL: A DIFERENÇA ENTRE SALDOS DEVEDORES SOB JUROS SIMPLES	65
CAPÍTULO 18 - LIQUIDAÇÃO ANTECIPADA. APURAÇÃO DE SALDOS DEVEDORES OU DE UMA PRESTAÇÃO ESPECÍFICA.	66
Sob juros compostos.	66

Sob juros simples.....	68
CAPÍTULO 19 - DEMONSTRAÇÃO DAS INCONSISTÊNCIAS DE MÉTODOS DITOS A JUROS SIMPLES	71
INCONSISTÊNCIA DO MÉTODO DE GAUSS.....	71
INCONSISTÊNCIA DO MEJS – MÉTODO DE EQUIVALÊNCIA A JUROS SIMPLES	72
CAPÍTULO 20 - CONCLUSÃO	76
CURRICULUM VITAE DO AUTOR	78
BIBLIOGRAFIA.....	79

CAPÍTULO 1 - ANATOCISMO

Antes de tudo, cabe dizer que o termo “anatocismo” não existe no ordenamento jurídico brasileiro, nada constando em qualquer texto legal.

Tanto pela origem etimológica do termo, em grego ou latim, e, ainda, o entendimento consolidado e pacificado pelo Superior Tribunal de Justiça, no Recurso Especial 1.388.972 (Relator Min. Marco Buzzi) e no Vocabulário Jurídico, o conceito ou a definição de anatocismo é pura e simplesmente de que se constitui na incidência de juros sobre juros, juros progressivos, juros frugíferos, juros compostos, capitalização (composta) de juros, variações linguísticas para designar um mesmo fenômeno jurídico-normativo que se apresenta em oposição aos juros simples.

O correto entendimento do doutrinador Carlos Roberto Gonçalves consta na decisão judicial retro citada: *“O anatocismo consiste na prática de somar os juros ao capital para contagem de novos juros. Há, no caso, capitalização composta, que é aquela em que a taxa de juros incide sobre o capital inicial, acrescido dos juros acumulados até o período anterior. Em resumo, pois, o chamado ‘anatocismo’ é a incorporação dos juros ao valor principal da dívida, sobre a qual incidem novos encargos.”* (Direito Civil Brasileiro. 8ª ed., São Paulo: Saraiva, 2011, p. 409).

Observe-se que não há referências à suposta necessidade de pagamento de juros nos prazos previstos.

Nada consta de concreto que o “fenômeno anatocismo” somente ocorra quando os juros vencidos não são integralmente pagos, situação que meramente caracteriza inadimplência ou mora.

A expressão “juro vencido” e a dicotomia “pago ou não pago” não são encontradas em qualquer das definições do termo “anatocismo” nos diversos idiomas, seja em inglês, espanhol, italiano, francês, germânico ocidental, finlandês, alemão, sueco ou grego.

Também não se caracteriza anatocismo em caso de haver amortização negativa, que somente revela ser a cota de juros maior do que o valor da prestação.

Do ponto de vista técnico, é importante alertar sobre a expressão “capitalização de juros”, que, embora comumente referenciada somente aos juros compostos, também ocorre “capitalização simples de juros”, e, conforme, já desenvolvi estudos, há “capitalização híbrida de juros”, tema que será objeto de futura publicação.

CAPÍTULO 2 - PENTATEUCO VDT

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Em inédita disrupção de conceitos e metodologias, criei o Pentateuco **VDT**, postulado de cinco fatores de autenticidade ou conjunto de critérios de integridade, que, sob a égide da Lei do **Valor do Dinheiro no Tempo**, revela se qualquer sistema de amortização, sob juros simples ou compostos, é, ou não, consistente e válido, na sua íntegra.

É imprescindível a validade de todos os 5 fatores de autenticidade, cumulativa e simultaneamente.

Caso contrário, o sistema de amortização é comprovadamente inconsistente, total ou parcialmente.

1º fator de autenticidade do Pentateuco VDT: “A soma do valor indiviso das prestações jurificadas (*), desde o momento de suas respectivas ocorrências, nos momentos ‘m’, até o instante final ‘n’, deve ser igual ao valor futuro do capital inicial”.

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

2º fator de autenticidade do Pentateuco VDT: “A soma do valor indiviso das prestações desjurificadas (**), desde cada momento ‘m’ de suas respectivas ocorrências, evoluindo até o momento ‘n’, e retornando até o instante inicial ‘0’, deve ser igual ao capital inicial (valor presente)”.

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

3º fator de autenticidade do Pentateuco VDT: “Em cada momento, o saldo devedor deve ser o resultado da diferença entre os valores jurificados do capital inicial e da soma das prestações jurificadas ocorridas até então”.

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

4º fator de autenticidade do Pentateuco VDT: “A cota de juros contida na primeira prestação deve ser SEMPRE resultado da multiplicação do capital inicial pela taxa de juros predeterminada”.

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

5º fator de autenticidade do Pentateuco VDT:

“A cota de juros, em cada prestação, deve ser o resultado da diferença entre os juros incidentes sobre os valores jurificados do capital inicial e da soma das prestações, ambos até o momento anterior; na forma simples, devem ser, ainda, subtraídos os juros sobre a soma nominal das cotas de juros sobre as prestações anteriores”.

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Contraprova ou prova de ouro (*golden proof*) do Pentateuco VDT:

Comprovados os quatro primeiros fatores de autenticidade, o quinto fator, também, pode ser demonstrado mediante a diferença entre dois saldos consecutivos, SD_m e SD_{m-1} , equivalente à cota de amortização CA_m , que, deduzida da prestação PMT_m , resulta na cota de juros CJ_m .

(*) Jurificação: incorporação ou incidência de juros sobre qualquer verba diferente do capital inicial

(**) Desjurificação: retirada ou expurgo de juros sobre qualquer verba diferente do valor futuro

CAPÍTULO 3 - FINANCIAMENTO PARA SER PAGO E QUITADO EM PARCELA ÚNICA AO FINAL DO PRAZO

A partir do capital inicial (valor presente PV), com base na taxa de juros (i%) e no período contratado (n), considerado o regime de capitalização (simples ou composta), em financiamentos ou empréstimos, a primeira verba derivada que deve ser apurada é o valor futuro (FV), exatamente igual ao quantum único a ser pago no final do prazo.

$$\boxed{\text{PV}} \quad i\% \rightarrow n \quad \boxed{\text{FV}}$$

A capitalização composta contempla juros sobre o saldo devedor (SD) anterior (a começar pelo capital inicial, PV, que, depois, gradativa e cumulativamente, é acrescido dos juros apurados em cada momento). Assim, são formadas bases de cálculo intermediárias que implicam em juros crescentes.

Por outro lado, de forma inédita na bibliografia da Matemática Financeira, pode-se afirmar aquilo que, conceitualmente, é óbvio, mas não se constata que, antes, tenha sido dito ou escrito: a capitalização simples, também, contempla a incidência de juros, mas, em cada momento, a base de cálculo não é mera e somente o capital inicial, e, sim, o saldo devedor (SD) anterior deduzido da soma dos valores dos juros anteriores ($\sum J_{ant}$).

Esta é a expressão mais adequada ao conceito de juros simples, em que não há a acumulação de juros sobre juros.

Para melhor compreensão e clareza, exemplificar-se-á a sistemática de cálculos suficiente para diferenciar a capitalização simples da composta, cuja igualdade somente ocorre no momento 1 de qualquer fluxo de caixa, através do exemplo padrão com as seguintes verbas originárias: capital inicial “PV” = 4.400,00, taxa de juros “i%” = 10%, e prazo “n” = 4, dados utilizados por diversos estudiosos em seus artigos.

Pelas fórmulas tradicionais da Matemática Financeira:

Juros compostos: $FV = PV \cdot (1 + i\%)^n$

$$FV_{JC} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^4$$

$$FV_{JC} = 4.400,00 \times 1,10^4 = 4.400,00 \times 1,4641$$

$$FV_{JC} = 6.442,04$$

Juros simples: $FV = PV \cdot [1 + (i\% \cdot n)]$

$$FV_{JS} = 4.400,00 \times [1 + (10\% \times 4)]$$

$$FV_{JS} = 4.400,00 \times (1 + 40\%) = 10.000,00 \times 1,40$$

$$FV_{JS} = 6.160,00$$

Revela-se a evolução do conteúdo das fórmulas:

* *sob juros compostos*: revelação do que, efetivamente, está contido no algoritmo disseminado de que, a cada momento, a base de cálculo é sempre o valor do saldo devedor anterior (SD_{m-1}).

*** no momento $m = 0$: $PV_{JC0} = 4.400,00 = SD_{JC0}$

*** no momento $m = 1$: $SD_{JC0} = 4.400,00 \times i\% = 10\%$, juro $J_1 = 440,00$; $SD_{JC1} = 4.840,00$

*** no momento $m = 2$: $SD_{JC1} = 4.840,00 \times i\% = 10\%$, juro $J_2 = 484,00$; $SD_{JC2} = 5.324,00$

*** no momento $m = 3$: $SD_{JC2} = 5.324,00 \times i\% = 10\%$, juro $J_3 = 532,40$; $SD_{JC3} = 5.856,40$

*** no momento $m = 4$: $SD_{JC3} = 5.856,40 \times i\% = 10\%$, juro $J_4 = 585,64$; $SD_{JC4} = 6.442,04$

* *sob juros simples*: revelação do que, efetivamente, está contido no algoritmo disseminado de que, a cada momento, a base de cálculo é sempre o valor do capital inicial (PV).

*** no momento $m = 1$: $SD_{JS0} = 4.400,00 \times i\%$ fixa = 10%, juro $J_1 = 440,00$ sobre a base de cálculo fixa, o capital inicial, a ser acrescido ao saldo devedor anterior; $SD_{JS1} = 4.840,00$

*** no momento $m = 2$: $SD_{JS1} = 4.400,00 \times i\%$ fixa = 10%, juro $J_2 = 440,00$ sobre a base de cálculo fixa, o capital inicial, a ser acrescido ao saldo devedor anterior; $SD_{JS2} = 5.280,00$

*** no momento $m = 3$: $SD_{JS2} = 4.400,00 \times i\%$ fixa = 10%, juro $J_3 = 440,00$ sobre a base de cálculo fixa, o capital inicial, a ser acrescido ao saldo devedor anterior; $SD_{JS3} = 5.720,00$

*** no momento $m = 4$: $SD_{JS3} = 4.400,00 \times i\%$ fixa = 10%, juro $J_4 = 440,00$ sobre a base de cálculo fixa, o capital inicial, a ser acrescido ao saldo devedor anterior; $SD_{JS4} = 6.160,00$

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Por outro lado, a evolução do capital inicial, sob *juros simples*, deve corresponder e refletir o conceito de que ***não devem incidir juros sobre juros anteriores***, ou seja, de cada saldo devedor anterior (SD_{m-1}) devem ser expurgados os juros anteriores (J_{ant}).

*** no momento $m = 0$: $PV_{JS0} = 4.400,00 = SD_{JS0}$

*** no momento $m = 1$: $SD_{JS0} = 4.400,00 (-) \sum J_{ant} = 0,00 \Rightarrow 4.400,00 \times i\% = 10\%$, juro $J_1 = 440,00$; $SD_{JS1} = 4.840,00$

*** no momento $m = 2$: $SD_{JS1} = 4.840,00 (-) \sum J_{ant} = 440,00 \Rightarrow 4.400,00 \times i\% = 10\%$, juro $J_2 = 440,00$; $SD_{JS2} = 5.280,00$

*** no momento $m = 3$: $SD_{JS2} = 5.280,00 (-) \sum J_{ant} = 440,00 + 440,00 = 880,00 \Rightarrow 4.400,00 \times i\% = 10\%$, juro $J_3 = 440,00$; $SD_{JS3} = 5.720,00$

*** no momento $m = 4$: $SD_{JS3} = 5.720,00 (-) \sum J_{ant} = 440,00 + 440,00 + 440,00 = 1.320,00 \Rightarrow 4.400,00 \times i\% = 10\%$, juro $J_4 = 440,00$; $SD_{JS4} = 6.160,00$

Tais operações encontram equivalência no conceito matemático do “enésimo termo” das progressões geométricas para os juros compostos, e das progressões aritméticas para os juros simples.

a) **Progressões aritméticas (PA)**: sucessão de números em cada um, a partir do segundo, é igual ao anterior mais um número constante, denominado “razão r ”

$$a_n = a_1 \cdot \{1 + [r \cdot (t - 1)]\}$$

em que

a_n = enésimo termo (FV_{JS} = valor futuro)

a_1 = primeiro termo (PV = valor presente)

r = razão linear da progressão aritmética (taxa de juros: $i\%$)

t = número de termos da P.A.: contagem dos momentos: primeiro termo, momento “0”; até o momento “ $m=t$ ”

n = número de períodos: de $m=0$ a $m=1$; de $m=1$ a $m=2$; ...; de $m=n-2$ a $m=n-1$; de $m=n-1$ a $m=n$

$t = n + 1$; $n = t - 1$

$$a_n = a_1 \cdot \{1 + [r \cdot n]\}$$

PV em $m=0$; FV_{JS} em $m=4$; 5 termos; 4 períodos:

$$a_{n \text{ PA PV}} = a_{1 \text{ PV}} \cdot \{1 + [r \cdot (t - 1)]\}$$

ou

$$a_{n \text{ PA PV}} = a_{1 \text{ PV}} \cdot [1 + (r \cdot n)]$$

$$a_{5 \text{ PA PV}} = 4.400,00 \times \{1 + [(10\% \times (5-1))]\} = 4.400,00 \times [1 + (10\% \times 4)]$$

$$a_{5 \text{ PA PV}} = 4.400,00 \times (1 + 40\%) = 4.400,00 \times 1,40$$

$$a_{5 \text{ PA PV}} = 6.160,00$$

b) **Progressões geométricas (PG)**: sucessão de números em cada um, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um número constante, denominado “razão q ”

$$a_n = a_1 \cdot q^{t-1}$$

em que

a_n = enésimo termo (FV_{JC} = valor futuro)

a_1 = primeiro termo (PV = valor presente)

q = razão exponencial da progressão geométrica (coeficiente de capitalização: $1+i\%$)

t = número de termos da P.G.: contagem dos momentos: primeiro termo, momento “0”; até o momento “ $m=t$ ”

n = número de períodos: de $m=0$ a $m=1$; de $m=1$ a $m=2$; de $m=n-2$ a $m=n-1$; de $m=n-1$ a $m=n$

$$t = n + 1; n = t - 1$$

$$a_n = a_1 \cdot q^n$$

PV em m=0; FV_{JC} em m=4; 5 termos; 4 períodos:

$$a_n \text{ PG PV} = a_1 \text{ PV} \cdot q^{t-1}$$

ou

$$a_n \text{ PG PV} = a_1 \text{ PV} \cdot q^n$$

$$a_5 \text{ PG PV} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^{5-1} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^4$$

$$a_5 \text{ PG PV} = 4.400,00 \times 1,10^4 = 4.400,00 \times 1,4641$$

$$a_5 \text{ PG PV} = 6.442,04$$

É importante observar que a lógica, das progressões, aritmética e geométrica, também está presente em cada momento da evolução do prazo, através do enésimo termo, com base na razão.

Sob juros simples, as progressões aritméticas:

$$\text{em } m = 1: a_2 = 4.400,00 \times \{1 + [10\% \times (2-1)]\} = 4.840,00$$

$$\text{em } m = 2: a_3 = 4.400,00 \times \{1 + [10\% \times (3-1)]\} = 5.280,00$$

$$\text{em } m = 3: a_4 = 4.400,00 \times \{1 + [10\% \times (4-1)]\} = 5.720,00$$

$$\text{em } m = 4: a_5 = 4.400,00 \times \{1 + [10\% \times (5-1)]\} = 6.160,00$$

Capitalização simples de juros (CSJ): sistema linear ou aritmético

Momento "m"	Número do termo da P.A.	Base de cálculo dos juros: Valor Presente PV	% taxa de juros a aplicar	Valor do juro do período	FV=Valor Futuro, período a período
0	1				4.400,00
1	2	4.400,00	10,0000%	440,00	4.840,00
2	3	4.400,00	10,0000%	440,00	5.280,00
3	4	4.400,00	10,0000%	440,00	5.720,00
4	5	4.400,00	10,0000%	440,00	6.160,00

Sob juros compostos, as progressões geométricas:

$$\text{em } m = 1: a_2 = 4.400,00 \times (1+10\%)^{2-1} = 4.840,00$$

$$\text{em } m = 2: a_3 = 4.400,00 \times (1+10\%)^{3-1} = 5.324,00$$

$$\text{em } m = 3: a_4 = 4.400,00 \times (1+10\%)^{4-1} = 5.856,40$$

$$\text{em } m = 4: a_5 = 4.400,00 \times (1+10\%)^{5-1} = 6.442,04$$

Capitalização composta de juros (CCJ): sistema exponencial ou geométrico

Momento "m"	Número do termo da P.G.	Base de cálculo dos juros: FV anterior	% taxa de juros a aplicar	Valor do juro do período	FV = Valor Futuro, período a período
0	1				4.400,00
1	2	4.400,00	10,00%	440,00	4.840,00
2	3	4.840,00	10,00%	484,00	5.324,00
3	4	5.324,00	10,00%	532,40	5.856,40
4	5	5.856,40	10,00%	585,64	6.442,04

Ou seja, são estas as operações “escondidas” nas tabelas e fórmulas tradicionais.

E é justamente a revelação do âmago destas operações que permite estruturar sistemas de amortização consistentes, tanto a juros compostos como sob juros simples, com base na lógica Matemática Pura e no Direito; e, principalmente, de acordo com a lei do “valor do dinheiro no tempo” (VDT), cláusula pétrea ou *landmark* da Matemática Financeira, que dispõe:

... dois valores são iguais, se, e somente se, forem do mesmo valor nominal e estiverem no mesmo momento temporal (Uma Nova Visão da Matemática Financeira, de Édson Rovina, Post Mortem, Editora. Clube de Autores, Joinville, 2019. Pág. 17).

E, ainda, que ***valores em datas diferentes não podem ser processados ou comparados entre si***.

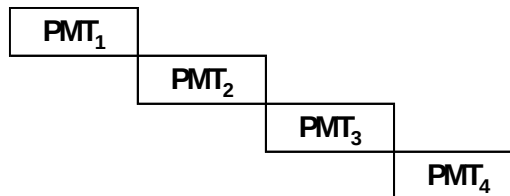
Em assim sendo, resta demonstrada a validade das metodologias de cálculo nos casos em que, sob determinada taxa de juros, um financiamento deve ser quitado por um único valor futuro, ao final do prazo contratado.

Mas, se, ao invés de um pagamento único ao final, houver ajuste para quitar o financiamento em prestações periódicas fixas, postecipadas, de mesmo valor entre si, há viabilidade em se elaborar fluxos de caixa equivalentes, tanto a juros simples como compostos.

CAPÍTULO 4 - FINANCIAMENTO PARA SER AMORTIZADO E QUITADO EM PRESTAÇÕES DE VALOR FIXO

Mantido o exemplo padrão com as verbas originárias do capital inicial “PV” = 4.400,00, taxa de juros “i%” = 10% e prazo “n” = 4, além da verba derivada Valor Futuro “FV”, deve ser calculada mais uma verba derivada, o valor fixo das prestações PMT, consideradas ao final de cada momento “m” de ocorrência dos eventos.

No exemplo dado, a prestação tem o mesmo valor nominal desde o momento m=1 até m=4.



$$PMT = PMT_1 = PMT_2 = PMT_3 = PMT_4$$

Uma vez aplicado o coeficiente de “jurificação”, simples ou composta, sobre o valor de cada uma das prestações, entre “1” e “n”, desde o momento da respectiva ocorrência até o momento final do prazo (n), a soma destas prestações “jurificadas” deve ser exatamente igual ou equivalente ao único valor futuro do capital inicial, no momento final “m = n”.

*** Jurificação: incorporação ou incidência de juros sobre uma verba.

CAPÍTULO 5 - CÁLCULO DA PRESTAÇÃO POSTECIPADA PERIÓDICA, COM VALOR FIXO, SOB JUROS COMPOSTOS

É possível obter o valor de cada uma das prestações periódicas postecipadas, iguais entre si, a juros compostos, de diversas formas.

Mediante demonstração algébrica, comprova-se que, a juros compostos, há igualdade entre o valor futuro do capital inicial (valor presente) e a soma dos valores jurificados das prestações postecipadas, no momento final “n”.

O coeficiente de jurificação composta da prestação, entre cada momento “m” e “n”, é

$$(1 + i\%)^{n-m}$$

$$FV_{JC} = PMT_{JC1} \cdot (1+i\%)^{n-1} + PMT_{JC2} \cdot (1+i\%)^{n-2} + \dots + PMT_{JCn-1} \cdot (1+i\%)^{n-n-1} + PMT_{JCn} \cdot (1+i\%)^{n-n}$$

$$PMT_{JC1} = PMT_{JC2} = \dots = PMT_{JCn-1} = PMT_{JCn} = PMT_{JC}$$

$$FV_{JC} = PMT_{JC} \cdot (1+i\%)^{n-1} + PMT_{JC} \cdot (1+i\%)^{n-2} + \dots + PMT_{JC} \cdot (1+i\%)^{n-n-1} + PMT_{JC} \cdot (1+i\%)^{n-n}$$

A PMT_{JC} é constante, na relação; e, isolada, colocada em evidência, permite obter o coeficiente de jurificação composta:

$$FV_{JC} = PMT_{JC} \cdot [(1+i\%)^{n-1} + (1+i\%)^{n-2} + \dots + (1+i\%)^{n-n-1} + (1+i\%)^{n-n}]$$

$$FV_{JC} = PMT_{JC} \cdot [(1+i\%)^{n-1} + (1+i\%)^{n-2} + \dots + (1+i\%) + 1]$$

No exemplo dado, a prestação PMT_{JC1} , para ser jurificada, até o final do prazo “n”, deve ser ajustada exponencialmente por 3 períodos, pois ocorre no momento 1 e o momento final é 4:

$$n - m = 4 - 1 = 3.$$

PMT_{JC2} , ajuste exponencial de 2 períodos; PMT_{JC3} , ajuste exponencial de 1 período; PMT_{JC4} , ajuste exponencial de 0 período.

$$FV_{JC} = PMT_{JC1} \times (1+10\%)^{4-1} + PMT_{JC2} \times (1+10\%)^{4-2} + PMT_{JC3} \times (1+10\%)^{4-3} + PMT_{JC4} \times (1+10\%)^{4-4}$$

$$FV_{JC} = PMT_{JC1} \times (1+10\%)^3 + PMT_{JC2} \times (1+10\%)^2 + PMT_{JC3} \times (1+10\%)^1 + PMT_{JC4} \times (1+10\%)^0$$

A PMT_{JC} é constante, na relação; e, isolada, colocada em evidência, permite obter o coeficiente total de jurificação composta:

$$FV_{JC} = PMT_{JC} \times [(1+10\%)^3 + (1+10\%)^2 + (1+10\%)^1 + (1+10\%)^0]$$

$$FV_{JC} = PMT_{JC} \times [(1,10)^3 + (1,10)^2 + (1,10)^1 + (1,10)^0]$$

$$FV_{JC} = PMT_{JC} \times (1,331 + 1,21 + 1,10 + 1,00)$$

$$FV_{JC} = PMT_{JC} \times 4,641$$

$$FV_{JC} = 6.442,04$$

$$PMT_{JC} = \frac{6.442,04}{4,641}$$

$$PMT_{JC} = 1.388,0715363$$

Conforme estudo de Edson Rovina, observa-se que, na fórmula

$$FV_{JC} = PMT_{JC} \cdot [(1+i\%)^{n-1} + (1+i\%)^{n-2} + \dots + (1+i\%)^{n-n-1} + (1+i\%)^{n-n}]$$

uma vez isolado o termo PMT_{JC} , a sequência

$$[(1+i\%)^{n-1} + (1+i\%)^{n-2} + \dots + (1+i\%)^{n-n-1} + (1+i\%)^{n-n}]$$

corresponde a uma progressão geométrica (P.G.), em que

$$n = n \text{ (número de períodos = número de termos } t - 1)$$

$$a_1 = (1 + i\%)^{n-1}$$

$$q = \frac{1}{1 + i\%}$$

A soma dos termos da P.G. é

$$S_{PG} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_{PG} = (1 + i\%)^{n-1} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1 + i\%}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{1 + i\%}\right) - 1}$$

$$S_{PG} = \frac{(1 + i\%)^n - 1}{i\%}$$

Em FV_{JC} , mantida a PMT_{JC} , e substituindo o restante, obtém-se a equação que expressa o valor futuro da soma das prestações, $FV_{\sum PMT_{JC} 1 \text{ até } n}$, no momento “n” (período), que deve ser igual ao valor futuro do capital inicial, FV_{JCPV} :

$$FV \sum_{t=1}^{t=n} PMT_{JC} 1 \text{ até } n = PMT_{JC} \cdot \frac{(1 + i\%)^n - 1}{i\%}$$

$$FV_{JCPV} = PV \cdot (1 + i\%)^n$$

$$PV \cdot (1 + i\%)^n = PMT_{JC} \cdot \frac{(1 + i\%)^n - 1}{i\%}$$

Isolando PMT_{JC} , obtém-se a fórmula padrão para cálculo da prestação a juros compostos (Tabela Price).

$$PMT_{JC} = PV \cdot i\% \cdot \frac{(1 + i\%)^n}{(1 + i\%)^n - 1}$$

No exemplo dado:

$$PMT_{JC} = 4.400,00 \times 10\% \times \frac{(1 + 10\%)^4}{(1 + 10\%)^4 - 1}$$

$$PMT_{JC} = \frac{440,00 \times 1,10^4}{1,10^4 - 1}$$

$$PMT_{JC} = \frac{440,00 \times 1,4641}{1,4641 - 1}$$

$$PMT_{JC} = \frac{644,204}{0,4641}$$

$$PMT_{JC} = 1.388,0715363$$

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Ainda, há uma última forma para cálculo da prestação fixa sob juros compostos, também por progressões geométricas (P.G.).

Dentro do prazo previsto ($n=4$) e aplicada a taxa de juros predeterminada ($i\%=10\%$), deve haver igualdade entre a P.G. formada a partir do capital inicial (4.400,00), desde $m=0$ até $m=n=4$, com 5 termos (4 períodos “n”), e a soma da P.G. formada a partir da prestação (incógnita), desde o momento $m=1$ até $m=n=4$, com 4 termos (3 períodos “n”).

Na P.G. a partir do capital inicial:

t_{PV} = número de termos da P.G. (contagem dos momentos): $t_1, t_2, \dots, t_{t-1}, t_t$

n_{PV} = número de períodos: $n_{PV} = t_{PV}-1$

$$FV_{JC1} = FV_{JC2}$$

$$a_{n \text{ PG PV}} = S_{n \text{ PG PMT}}$$

A partir do capital inicial, no momento $m=0$, até o momento $m=n$:

$$a_{n \text{ PG PV}} = a_{1 \text{ PV}} \cdot q^{t_{PV}-1}$$

$$a_{n \text{ PG PV}} = a_{1 \text{ PV}} \cdot q^{nPV}$$

$$FV_{JC1} = a_{n \text{ PG PV}} = a_{1 \text{ PV}} \cdot q^{nPV}$$

$$FV_{JC1} = a_{n \text{ PG PV}} = PV \cdot (1 + i\%)^{tPV-1} = PV \cdot (1 + i\%)^{nPV}$$

No exemplo dado, PV em m=0; FV_{JC1} em m=n=4; 5 termos “t_{PV}”; 4 períodos “n_{PV}”:

$$a_{1 \text{ PG PV}} = PV = 4.400,00; q = 1 + i\% = 1 + 10\%; t_{PV} = 5; n_{PV} = t_{PV} - 1 = 5 - 1 = 4$$

$$FV_{JC1} = a_{5 \text{ PG PV}} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^{5-1} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^4$$

$$FV_{JC1} = a_{5 \text{ PG PV}} = 4.400,00 \times 1,10^4 = 4.400,00 \times 1,4641$$

$$FV_{JC1} = a_{5 \text{ PG PV}} = 6.442,04$$

Para ser possível o encontro de FV_{JC1} e FV_{JC2}, no momento m=n=4, a fim de aferir se há a igualdade pretendida, cada “prestação” PMT_{JC} (incógnita) deve ser jurificada exponencialmente, desde o momento de sua respectiva ocorrência até o final do prazo. A soma dos valores resultantes desta jurificação equivale à soma dos termos de uma progressão geométrica, com “t” termos, n períodos (n = t-1), a₁ = PMT_{JC}, desde o momento m=1 até m=n=4, através da razão de crescimento “q” (“1 + i%”):

$$S_{n \text{ PG PMT}} = a_1 \cdot \frac{q^{tPMT} - 1}{q - 1}$$

$$S_{n \text{ PG PMT}} = a_{1 \text{ PG PMT}} \cdot \frac{q^{tPMT} - 1}{q - 1}$$

$$FV_{JC2} = S_{n \text{ PG PMT}} = PMT_{JC} \cdot \frac{q^{tPMT} - 1}{q - 1}$$

$$FV_{JC2} = S_{n \text{ PG PMT}} = \sum_{t=1}^{t=t} PMT_{JC} = PMT_{JC} \cdot \frac{(1 + i\%)^{tPMT} - 1}{(1 + i\%) - 1}$$

No exemplo dado, PMT_{JC} de m=1 até m=n=4; 4 termos “t_{PMT}”; 3 períodos “n_{PMT}”:

$$a_{1 \text{ PG PMT}} = PMT_{JC}; q = 1 + i\% = 1 + 10\%; t_{PMT} = 4; n_{PMT} = t_{PMT} - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$FV_{JC2} = S_{n \text{ PG PMT}} = \sum_{t=1}^{t=t} PMT_{JC} = PMT_{JC} \times \frac{(1 + 10\%)^4 - 1}{(1 + 10\%) - 1}$$

$$FV_{JC2} = S_{n \text{ PG PMT}} = \sum_{t=1}^{t=5} PMT_{JC} = PMT_{JC} \times \frac{0,4641}{0,10}$$

$$FV_{JC2} = S_{n \text{ PG PMT}} = \sum_{t=1}^{t=5} PMT_{JC} = PMT_{JC} \times 4,641$$

Haja vista a igualdade:

$$FV_{JC1} = FV_{JC2}$$

$$PV \cdot (1 + i\%)^{t_{PV}-1} = PMT_{JC} \cdot \frac{(1 + i\%)^{t_{PMT}} - 1}{(1 + i\%) - 1}$$

$$PMT_{JC} = \frac{PV \cdot (1 + i\%)^{t_{PV}-1} \cdot (1 + i\%) - 1}{(1 + i\%)^{t_{PMT}} - 1}$$

$$PMT_{JC} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^{5-1} \times \frac{(1 + 10\%) - 1}{(1 + 10\%)^4 - 1}$$

$$PMT_{JC} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^4 \times \frac{(1 + 10\%) - 1}{(1 + 10\%)^4 - 1}$$

$$PMT_{JC} = 4.400,00 \times 1,4641 \times \frac{0,10}{0,4641}$$

$$PMT_{JC} = \frac{644,204}{0,4641}$$

$$PMT_{JC} = 1.388,07$$

Em suma, sob a taxa de juros compostos de 10% ao período, as prestações periódicas (1.388,07) formam um fluxo de caixa, que no momento “n”, é equivalente ao valor futuro (6.442,04) obtido a partir do capital inicial (4.400,00).

CAPÍTULO 6 - CÁLCULO DA PRESTAÇÃO POSTECIPADA PERIÓDICA, COM VALOR FIXO, SOB JUROS SIMPLES

É possível obter o valor de cada uma das prestações periódicas postecipadas, iguais entre si, a juros simples, de diversas formas.

Mediante demonstração algébrica, comprova-se que, a juros simples, há igualdade entre o valor futuro do capital inicial (valor presente) e a soma dos valores jurificados das prestações postecipadas, no momento final “n”.

O coeficiente de jurificação simples ou linear da prestação, entre cada momento “m” e “n”, é

$$1 + [i\% \cdot (n - m)]$$

$$FV_{JS} = PMT_{JS} \cdot \{[1 + (i\% \cdot (n-1))] + [1 + (i\% \cdot (n-2))] + \dots + [1 + (i\% \cdot (n - n-1))] + [1 + (i\% \cdot (n-n))]\}$$

$$PMT_{JS1} = PMT_{JS2} = PMT_{JS3} = PMT_{JS4} = PMT_{JS}$$

$$FV_{JS} = PMT_{JS} \cdot [1 + i\% \cdot (n-1)] + PMT_{JS} \cdot [1 + i\% \cdot (n-2)] + \dots + PMT_{JS} \cdot [1 + i\% \cdot (n - n-1)] + PMT_{JS} \cdot [1 + i\% \cdot (n-n)]$$

$$FV_{JS} = PMT_{JS} \cdot [1 + i\% \cdot (n-1)] + PMT_{JS} \cdot [1 + i\% \cdot (n-2)] + \dots + PMT_{JS} \cdot [1 + i\%] + PMT_{JS}$$

A PMT_{JS} é constante, na relação; e, isolada, colocada em evidência, permite obter o coeficiente de jurificação simples:

$$FV_{JS} = PMT_{JS} \cdot \{[1 + (i\% \cdot (n-1))] + [1 + (i\% \cdot (n-2))] + \dots + [1 + (i\% \cdot (n - n-1))] + [1 + (i\% \cdot (n-n))]\}$$

$$FV_{JS} = PMT_{JS} \cdot \{[1 + (i\% \cdot (n-1))] + [1 + (i\% \cdot (n-2))] + \dots + [1 + (i\%)] + 1\}$$

No exemplo dado, a prestação PMT_{JS1} , para ser jurificada, até o final do prazo “n”, deve ser ajustada linearmente por 3 períodos, pois ocorre no momento 1 e o momento final é 4:

$$n - m = 4 - 1 = 3.$$

PMT_{JS2} , ajuste linear de 2 períodos; PMT_{JS3} , ajuste linear de 1 período; PMT_{JS4} , ajuste linear de 0 período.

$$FV_{JS} = PMT_{JS1} \times [1 + 10\% \times (4-1)] + PMT_{JS2} \times [1 + 10\% \times (4-2)] + PMT_{JS3} \times [1 + 10\% \times (4-3)] + PMT_{JS4} \times [1 + 10\% \times (4-4)]$$

$$FV_{JS} = PMT_{JS1} \times [1 + 10\% \times 3] + PMT_{JS2} \times [1 + 10\% \times 2] + PMT_{JS3} \times [1 + 10\% \times 1] + PMT_{JS4} \times [1 + 10\% \times 0]$$

A PMT_{JS} é constante, na relação; e, isolada, colocada em evidência, permite obter o coeficiente total de jurificação simples:

$$FV_{JS} = PMT_{JS} \times \{[1 + (10\% \times 4-1)] + [1 + (10\% \times 4-2)] + [1 + (10\% \times 4-3)] + [1 + (10\% \times 4-4)]\}$$

$$FV_{JS} = PMT_{JS} \times \{[1 + (10\% \times 3)] + [1 + (10\% \times 2)] + [1 + (10\% \times 1)] + [1 + (10\% \times 0)]\}$$

$$FV_{JS} = PMT_{JS} \times [(1+0,30) + (1+0,20) + (1+0,10) + (1+0,00)]$$

$$FV_{JS} = PMT_{JS} \times [1,30 + 1,20 + 1,10 + 1,00]$$

$$FV_{JS} = PMT_{JS} \times 4,60$$

$$6.160,00 = PMT_{JS} \times 4,60$$

$$PMT_{JS} = \frac{6.160,00}{4,60}$$

$$PMT_{JC} = 1.339,13043478$$

Conforme estudo de Edson Rovina, observa-se que, na fórmula

$$FV_{JS} = PMT_{JS} \cdot \{[1+(i\% \cdot (n-1))] + [1+(i\% \cdot (n-2))] + \dots + [1+(i\% \cdot (n - n-1))] + [1+(i\% \cdot (n-n))]\}$$

uma vez isolados os termos PMT_{JS} , “n” e “i%”, a sequência

$$(n-1) + (n-2) + \dots + (n - n-1)] + (n-n)$$

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 1 + 0$$

$$[(n-1)] + (n-2)] \dots + 1]$$

corresponde a uma progressão aritmética (P.A.), em que

$$a_1 = n - 1$$

$$\text{número de termos} = n - 1$$

$$a_n = 1$$

$$FV_{JS} = PMT_{JS} \cdot [1+i\% \cdot (n-1)] + PMT_{JS} \cdot [1+i\% \cdot (n-2)] + \dots + PMT_{JS} \cdot [1+i\%] + PMT_{JS}$$

$$FV_{JS} = PMT_{JS} \cdot \{[1+i\% \cdot (n-1)] + [1+i\% \cdot (n-2)] + \dots + [1+i\%] + 1\}$$

$$FV_{JS} = PMT_{JS} \cdot \{1+i\% \cdot (n-1) + 1+i\% \cdot (n-2) + \dots + 1+i\% + 1\}$$

$$\text{Somando: } 1 + 1 + \dots + 1 + 1 = n$$

$$FV_{JS} = PMT_{JS} \cdot \{n + [i\% \cdot (n-1)] + [(i\% \cdot (n-2))] + \dots + i\%\}$$

$$FV_{JS} = PMT_{JS} \cdot \{n + i\% \cdot [(n-1)] + (n-2)] + 1]\}$$

A soma dos termos da P.A. é

$$S_{PA} = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_{PA} = \frac{[(n - 1) + 1] \cdot (n - 1)}{2}$$

Em FV_{JS} , mantida a PMT_{JS} , e substituindo o restante, obtém-se a equação que expressa o valor futuro da soma das prestações, $FV_{\sum PMT_{JS} 1 \text{ a } n}$, no momento “n”, que deve ser igual ao valor futuro do capital inicial, FV_{PV} :

$$FV \sum_{n=1}^{n=n} PMT_{JS} = PMT_{JS} \cdot \{n + i\% \cdot \frac{[(n - 1) + 1] \cdot (n - 1)}{2}\}$$

$$FV_{PV} = PV \cdot [1 + (i\% \cdot n)]$$

$$FV_{PV} = FV \sum_{n=1}^{n=n} PMT_{JS} \quad PV$$

$$PV \cdot [1 + (i\% \cdot n)] = PMT_{JS} \cdot \{n + i\% \cdot \frac{[(n - 1) + 1] \cdot (n - 1)}{2}\}$$

Isolando PMT_{JS} , obtém-se a fórmula padrão para cálculo da prestação a juros simples.

$$PMT_{JS} = \frac{2 \cdot PV \cdot [1 + (i\% \cdot n)]}{\{[(i\% \cdot n) - i\%] + 2\} \cdot n}$$

ou

$$PMT_{JS} = \frac{\{PV \cdot [1 + (i\% \cdot n)]\}}{\{1 + \left[i\% \cdot \frac{(n - 1)}{2}\right]\} \cdot n}$$

Mediante aplicação da fórmula geral da prestação sob juros simples:

$$PMT_{JS} = \frac{2 \times 4.400,00 \times [1 + (10\% \times 4)]}{\{[(10\% \times 4) - 10\%] + 2\} \times 4}$$

$$PMT_{JS} = \frac{8.800,00 \times [(1 + 40\%)]}{[(40\% - 10\%) + 2] \times 4}$$

$$PMT_{JS} = \frac{8.800,00 \times 1,40}{(30\% + 2) \times 4}$$

$$PMT_{JS} = \frac{12.320,00}{2,30 \times 4}$$

$$PMT_{JS} = \frac{12.320,00}{9,20}$$

$$PMT_{JS} = 1.339,13043478$$

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Ainda, há uma última forma para cálculo da prestação fixa sob juros simples, também por progressões aritméticas (P.A.).

Dentro do prazo previsto ($n=4$) e aplicada a taxa de juros predeterminada ($i\%=10\%$), deve haver igualdade entre a P.A. formada a partir do capital inicial (4.400,00), desde o momento $m=0$ até $m=n=4$, com 5 termos, e a soma da P.A. formada a partir da prestação (incógnita), desde o momento $m=1$ até $m=n=4$, com 4 termos.

Na P.A. a partir do capital inicial:

t_{PV} = número de termos da P.A. (contagem dos momentos): $t_1, t_2, \dots, t_{t-1}, t_t$

n_{PV} = número de períodos: $n_{PV} = t_{PV} - 1$

$$FV_{JS1} = FV_{JS2}$$

$$a_{n \text{ PA PV}} = S_{n \text{ PA PMT}}$$

A partir do capital inicial, no momento $m=0$, até o momento $m=n$:

$$FV_{JS1} = a_{n \text{ PA PV}} = a_{1 \text{ PV}} \cdot [r \cdot (t_{PV} - 1)]$$

$$FV_{JS1} = a_{n \text{ PA PV}} = PV \cdot [1 + (i\% \cdot n_{PV})]$$

No exemplo dado, PV em $m=0$; FV_{JS1} em $m=n=4$; 5 termos “ t_{PV} ”; 4 períodos “ n_{PV} ”:

$$a_{1 \text{ PA PV}} = PV = 4.400,00; r = 10\%; t_{PV} = 5; n_{PV} = t_{PV} - 1 = 5 - 1 = 4$$

$$FV_{JS1} = a_{5 \text{ PA PV}} = 4.400,00 \times \{1 + [10\% \times (5-1)]\} = 4.400,00 \times [1 + (10\% \times 4)]$$

$$FV_{JS1} = a_{5 \text{ PA PV}} = 4.400,00 \times (1+0,40) = 4.400,00 \times 1,40$$

$$FV_{JS1} = a_{5 \text{ PA PV}} = 6.160,00$$

Para ser possível o encontro de FV_{JS1} e FV_{JS2} , no momento $m=n=4$, a fim de aferir se há a igualdade pretendida, cada “prestação” PMT_{JC} (incógnita) deve ser jurificada linearmente, desde o momento de sua respectiva ocorrência até o final do prazo. A soma dos valores resultantes desta jurificação equivale à soma dos termos de uma progressão aritmética, com “ t ” termos, n períodos ($n = t - 1$), $a_1 = PMT_{JS}$, desde o momento $m=1$ até $m=n=4$, 4 termos, 3 períodos, através da razão de crescimento “ i ” (“ $i\%$ ”):

$$S_{n \text{ PA PMT}} = (a_1 + a_n) \cdot \frac{t}{2}$$

$$S_{n \text{ PA PMT}} = \{a_{1 \text{ PMT}} + a_{1 \text{ PMT}} \cdot [r \cdot (t_{\text{PMT}} - 1)]\} \cdot \frac{t_{\text{PMT}}}{2}$$

$$S_{n \text{ PA PMT}} = a_{1 \text{ PMT}} \cdot \{1 + [1 + (r \cdot n_{\text{PMT}})]\} \cdot \frac{t_{\text{PMT}}}{2}$$

$$S_{n \text{ PA PMT}} = \{2 \cdot a_{1 \text{ PMT}} + [r \cdot (t_{\text{PMT}} - 1)]\} \cdot \frac{t_{\text{PMT}}}{2}$$

$$S_{n \text{ PA PMT}} = \{2 \cdot \text{PMT}_{\text{JS}} + [i\% \cdot n_{\text{PMT}}]\} \cdot \frac{t_{\text{PMT}}}{2}$$

No exemplo dado, PMT_{JS} de $m=1$ até $m=n=4$; 4 termos “t”, 3 períodos:

$$a_{1 \text{ PA PMT}} = \text{PMT}_{\text{JS}}; r = 10\%; t_{\text{PMT}} = 4; n_{\text{PMT}} = t_{\text{PMT}} - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$\text{FV}_{\text{JS2}} = S_{n \text{ PA PMT}} = \text{FV} \sum_{t=1}^{t=t} \text{PMT}_{\text{JS}} = \{\text{PMT}_{\text{JS}} \times [1 + (10\% \times 3)]\} \times \frac{4}{2}$$

$$\text{FV}_{\text{JS2}} = S_{n \text{ PA PMT}} = \{2 \cdot [\text{PMT}_{\text{JS}} + (10\% \times 3)]\} \times \frac{4}{2}$$

$$\text{FV}_{\text{JS2}} = S_{n \text{ PA PMT}} = \text{PMT}_{\text{JS}} \times [1 + 1,30] \times 2$$

$$\text{FV}_{\text{JS2}} = S_{n \text{ PA PMT}} = \text{PMT}_{\text{JS}} \times [2 + 0,30] \times 2$$

$$\text{FV}_{\text{JS2}} = S_{n \text{ PA PMT}} = \text{PMT}_{\text{JS}} \times 4,60$$

Haja vista a igualdade:

$$\text{FV}_{\text{JS1}} = \text{FV}_{\text{JS2}}$$

$$\text{PV} \cdot [1 + (i\% \cdot n_{\text{PV}})] = \{2 \cdot [\text{PMT}_{\text{JS}} + (i\% \cdot n_{\text{PMT}})]\} \cdot \frac{t_{\text{PMT}}}{2}$$

$$4.400,00 \times [1 + (10\% \times 4)] = \{2 \times [\text{PMT}_{\text{JS}} + (10\% \times 3)]\} \times \frac{4}{2}$$

$$6.160,00 = \text{PMT}_{\text{JS}} \times 4,60$$

$$\text{PMT}_{\text{JS}} = \frac{6.160,00}{4,60}$$

$$\text{PMT}_{\text{JS}} = 1.339,13$$

Em suma, sob a taxa de juros simples de 10% ao período, as prestações periódicas (1.339,13) formam um fluxo de caixa, que no momento “n”, é equivalente ao valor futuro (6.160,00) obtido a partir do capital inicial (4.400,00).

CAPÍTULO 7 - EQUIVALÊNCIA ENTRE O VALOR FUTURO DO CAPITAL INICIAL E A SOMA DAS PRESTAÇÕES FIXAS “JURIFICADAS”, NO MOMENTO FINAL “M=N”.

Comprovação da equivalência entre o valor futuro e o fluxo de caixa das prestações, no momento “n”, sob juros compostos.

A soma dos produtos obtidos pela multiplicação de cada prestação (PMT_{JC}) pelo seu respectivo coeficiente de jurificação composta, entre os momentos $m=1$ e $m=4$, até $m = n = 4$, deverá ser igual ao valor futuro FV_{JC} em $n = 4$.

PMT_{JC1} , ajuste exponencial, jurificação de $m=1$ até $m=n=4$:

$$1.388,07 \times (1+10\%)^{4-1} = 1.388,07 \times (1+10\%)^3 = 1.388,07 \times 1,331 = 1.847,52$$

PMT_{JC2} , ajuste exponencial, jurificação de $m=2$ até $m=n=4$:

$$1.388,07 \times (1+10\%)^{4-2} = 1.388,07 \times (1+10\%)^2 = 1.388,07 \times 1,21 = 1.679,57$$

PMT_{JC3} , ajuste exponencial, jurificação de $m=3$ até $m=n=4$:

$$1.388,07 \times (1+10\%)^{4-3} = 1.388,07 \times (1+10\%)^1 = 1.388,07 \times 1,10 = 1.526,88$$

PMT_{JC4} , ajuste exponencial, jurificação de $m=n=4$ até $m=n=4$:

$$1.388,07 \times (1+10\%)^{4-4} = 1.388,07 \times (1+10\%)^0 = 1.388,07 \times 1,00 = 1.388,07$$

$$1.847,52 + 1.679,57 + 1.526,88 + 1.388,07 = 6.442,04$$

Somatório dos valores jurificados da prestação periódica postecipada, de mesmo valor, sob juros compostos, desde cada momento de ocorrência até o final "n"

Momento m	Períodos vindendos (n-m)	Valor da prestação periódica a juros compostos	Fator do valor futuro (numerador)	Fator do valor futuro (denominador)	Coeficiente de jurificação das prestações a juros compostos	Soma dos valores jurificados das prestações na forma composta, até o prazo "n"
0	4					
1	3	1.388,07	1,4641	1,1000	1,3310	1.847,52
2	2	1.388,07	1,4641	1,2100	1,2100	1.679,57
3	1	1.388,07	1,4641	1,3310	1,1000	1.526,88
4	0	1.388,07	1,4641	1,4641	1,0000	1.388,07
Σ PMTs jurificadas em n						6.442,04

Resta, assim, comprovado que o fluxo de caixa constituído pelas 4 prestações a juros compostos, 1.388,07 cada uma, é equivalente ao valor futuro do capital inicial também a juros compostos, 6.442,04.

Comprovação da equivalência entre o valor futuro e o fluxo de caixa das prestações, no momento “n”, sob juros simples.

A soma dos produtos obtidos pela multiplicação de cada prestação (PMT_{JS}) pelo seu respectivo coeficiente de jurificação simples, entre os momentos $m=1$ e $m=4$, até $m = n=4$, deverá ser igual ao valor futuro FV_{JS} em $n = 4$.

PMT_{JS1} , ajuste linear, jurificação de $m=1$ até $m=n=4$:

$$1.339,13 \times \{1 + [10\% \times (4-1)]\} = 1.339,13 \times [1+(10\% \times 3)] = 1.339,13 \times 1,30 = 1.740,87$$

PMT_{JS2} , ajuste linear, jurificação de $m=2$ até $m=n=4$:

$$1.339,13 \times \{1 + [10\% \times (4-2)]\} = 1.339,13 \times [1+(10\% \times 2)] = 1.339,13 \times 1,20 = 1.606,96$$

PMT_{JS3} , ajuste linear, jurificação de $m=3$ até $m=n=4$:

$$1.339,13 \times \{1 + [10\% \times (4-3)]\} = 1.339,13 \times [1+(10\% \times 1)] = 1.339,13 \times 1,10 = 1.473,04$$

PMT_{JS4} , ajuste linear, jurificação de $m=n=4$ até $m=n=4$:

$$1.339,13 \times \{1 + [10\% \times (4-4)]\} = 1.339,13 \times [1+(10\% \times 0)] = 1.339,13 \times 1,00 = 1.339,13$$

$$1.740,87 + 1.606,96 + 1.473,04 + 1.339,13 = 6.160,00$$

Somatório dos valores jurificados da prestação periódica postecipada, de mesmo valor, sob juros simples, desde cada momento de ocorrência até o final "n"

Momento m	Períodos vindendos (n-m)	Valor da prestação periódica a juros simples	Fator do valor futuro (numerador)	Fator do valor futuro (denominador)	Coeficiente de jurificação das prestações a juros simples	Soma dos valores jurificados das prestações na forma simples, até o prazo "n"
0	4					
1	3	1.339,13	1,4000	1,1000	1,3000	1.740,87
2	2	1.339,13	1,4000	1,2000	1,2000	1.606,96
3	1	1.339,13	1,4000	1,3000	1,1000	1.473,04
4	0	1.339,13	1,4000	1,4000	1,0000	1.339,13
Σ PMTs jurificadas em n						6.160,00

Resta, assim, comprovado que o fluxo de caixa constituído pelas 4 prestações a juros simples, 1.339,13 cada uma, é equivalente ao valor futuro do capital inicial também a juros simples, 6.160,00.

CAPÍTULO 8 - VALOR PRESENTE DAS PRESTAÇÕES FIXAS

Se foi corretamente obtido o valor das prestações, de tal modo que haja equivalência da soma destas parcelas com o valor futuro, no momento “n”, a lógica matemática impõe que, por operação inversa, a soma dos valores ajustados destas mesmas prestações para o momento “0” deva ser igual ao valor do capital inicial.

Em matemática, uma operação inversa é a que desfaz o que foi feito pela operação original, e proporciona o retorno ao *status quo ante*.

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Uma vez aplicado o coeficiente de jurificação, simples ou composta, sobre o valor de cada uma das prestações, entre “1” e “n”, desde o momento da respectiva ocorrência até o momento final do prazo (n), a “desjurificação” da soma destas prestações jurificadas deve ser exatamente igual ao valor presente ou capital inicial, no momento final “0”.

*** Desjurificação: retirada ou expurgo de juros sobre uma verba

Comprovação da equivalência entre o valor do capital inicial e o fluxo de caixa das prestações, no momento “0”, a juros compostos.

$$PMT_{JC} \cdot \frac{(1 + i\%)^{n-m}}{(1 + i\%)^n}$$

PMT_{JC1}, “jurificação” exponencial, de m=1 até m=n=4, desjurificação até m=0:

$$1.388,07 \times \frac{(1 + 10\%)^{4-1}}{(1 + 10\%)^4} = 1.388,07 \times \frac{1,331}{1,4641} = 1.261,88$$

PMT_{JC2}, “jurificação” exponencial, de m=2 até m=n=4, desjurificação até m=0:

$$1.388,07 \times \frac{(1 + 10\%)^{4-2}}{(1 + 10\%)^4} = 1.388,07 \times \frac{1,21}{1,4641} = 1.147,17$$

PMT_{JC3}, “jurificação” exponencial, de m=3 até m=n=4, desjurificação até m=0:

$$1.388,07 \times \frac{(1 + 10\%)^{4-3}}{(1 + 10\%)^4} = 1.388,07 \times \frac{1,10}{1,4641} = 1.042,88$$

PMT_{JC4}, “jurificação” exponencial, de m=n=4 até m=n=4, desjurificação até m=0:

$$1.388,07 \times \frac{(1 + 10\%)^{4-4}}{(1 + 10\%)^4} = 1.388,07 \times \frac{1,00}{1,4641} = 948,07$$

$$1.261,88 + 1.147,17 + 1.042,88 + 948,07 = 4.400,00$$

Cálculo do valor presente das prestações periódicas postecipadas, de mesmo valor, sob juros compostos, desde cada momento de ocorrência até o início "0" (passando por "n")

Momento m	Períodos vindendos (n-m)	Valor da prestação periódica a juros compostos	Fator do valor presente (numerador)	Fator do valor presente (denominador)	Coefficiente de desjurificação das prestações a juros compostos (divisor)	Coefficiente de desjurificação das prestações a juros compostos (multiplicador)	Soma dos valores desjurificados das prestações na forma composta, até o prazo "0"
0	4						
1	3	1.388,07	1,4641	1,3310	1,1000	0,909091	1.261,88
2	2	1.388,07	1,4641	1,2100	1,2100	0,826446	1.147,17
3	1	1.388,07	1,4641	1,1000	1,3310	0,751315	1.042,88
4	0	1.388,07	1,4641	1,0000	1,4641	0,683013	948,07
Σ PMTs desjurificadas em 0							4.400,00

Neste caso excepcional, específico e exclusivo, somente dos juros compostos, **é possível simplificar a equação matemática de ajuste exponencial das prestações**, desde o seu respectivo momento de ocorrência até o instante inicial do prazo, mediante desjurificação direta de "m" para "0", sem que seja preciso o processo completo de jurificar a verba até o momento "n", e, depois, desjurificar até "0".

$$\frac{PMT}{(1 + i\%)^m}$$

PMT_{JC1}, desjurificação exponencial, diretamente de m=1 até m=0:

$$\frac{1.388,07}{(1 + 10\%)^1} = \frac{1.388,07}{1,10} = 1.261,88$$

PMT_{JC2}, desjurificação exponencial, diretamente de m=2 até m=0:

$$\frac{1.388,07}{(1 + 10\%)^2} = \frac{1.388,07}{1,21} = 1.147,17$$

PMT_{JC3}, desjurificação exponencial, diretamente de m=3 até m=0:

$$\frac{1.388,07}{(1 + 10\%)^3} = \frac{1.388,07}{1,331} = 1.042,88$$

PMT_{JC4}, desjurificação exponencial, diretamente de m=n=4 até m=0:

$$\frac{1.388,07}{(1 + 10\%)^4} = \frac{1.388,07}{1,4641} = 948,07$$

$$1.261,88 + 1.147,17 + 1.042,88 + 948,07 = 4.400,00$$

Resta, assim, comprovado que o fluxo de caixa constituído pelo valor de 4 prestações a juros compostos, 1.388,07 cada uma, gera fluxo de caixa equivalente ao valor presente do capital inicial também a juros compostos, 4.400,00.

Comprovação da equivalência entre o valor do capital inicial e o fluxo de caixa das prestações, no momento “0”, a juros simples.

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

$$PMT_{JS} \cdot \frac{1 + [i\% \cdot (n - m)]}{1 + (i\% \cdot n)}$$

PMT_{JS1}, “jurificação” linear, de m=1 até m=n=4, desjurificação até m=0:

$$1.339,13 \times \frac{1 + [10\% \cdot (4 - 1)]}{1 + (10\% \times 4)} = 1.339,13 \times \frac{1,30}{1,40} = 1.243,48$$

PMT_{JS2}, “jurificação” linear, de m=2 até m=n=4, desjurificação até m=0:

$$1.339,13 \times \frac{1 + [10\% \cdot (4 - 2)]}{1 + (10\% \times 4)} = 1.339,13 \times \frac{1,20}{1,40} = 1.147,83$$

PMT_{JS3}, “jurificação” linear, de m=3 até m=n=4, desjurificação até m=0:

$$1.339,13 \times \frac{1 + [10\% \cdot (4 - 3)]}{1 + (10\% \times 4)} = 1.339,13 \times \frac{1,10}{1,40} = 1.052,17$$

PMT_{JS4}, “jurificação” linear, de m=n=4 até m=n=4, desjurificação até m=0:

$$1.339,13 \times \frac{1 + [10\% \cdot (4 - 4)]}{1 + (10\% \times 4)} = 1.339,13 \times \frac{1,00}{1,40} = 956,52$$

$$1.243,48 + 1.147,83 + 1.052,17 + 956,52 = 4.400,00$$

Cálculo do valor presente das prestações periódicas postecipadas, de mesmo valor,

sob juros simples, desde cada momento de ocorrência até o início “0” (passando por “n”)

Momento m	Períodos Vencidos (n-m)	Valor da prestação periódica a juros simples	Fator do valor presente (numerador)	Fator do valor presente (denominador)	Coefficiente de desjurificação das prestações a juros simples (divisor)	Coefficiente de desjurificação das prestações a juros simples (multiplicador)	Soma dos valores desjurificados das prestações na forma simples, até o prazo “0”
0	4						
1	3	1.339,13	1,3000	1,4000	0,928571	1,076923	1.243,48
2	2	1.339,13	1,2000	1,4000	0,857143	1,166667	1.147,83
3	1	1.339,13	1,1000	1,4000	0,785714	1,272727	1.052,17
4	0	1.339,13	1,0000	1,4000	0,714286	1,400000	956,52
Σ PMTs desjurificadas em 0							4.400,00

Resta, assim, comprovado que o fluxo de caixa constituído pelo valor de 4 prestações a juros simples, 1.339,13 cada uma, gera fluxo de caixa equivalente ao valor presente do capital inicial também a juros simples, 4.400,00.

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Por outro lado, há quem tente “simplificar” a expressão

$$\frac{1 + [i\% \cdot (n - m)]}{1 + (i\% \cdot n)}$$

reduzindo-a para

$$\frac{1}{1 + (i\% \cdot m)}$$

mas isso não retorna o valor presente original, de 4.400,00

Momento m	Períodos vencidos (n-m)	Valor da prestação periódica a juros simples	Fator do valor presente (numerador)	Soma dos valores desjurificados das prestações na forma simples, até o prazo "0"
0	4			
1	3	1.339,13	1,1000	1.217,39
2	2	1.339,13	1,2000	1.115,94
3	1	1.339,13	1,3000	1.030,10
4	0	1.339,13	1,4000	956,52
Σ PMTs desjurificadas em 0				4.319,96

O célebre matemático Edson Rovina (in memoriam – 2019), na página 139 do livro “Uma nova visão da Matemática Financeira” (edição póstuma, Clube de Autores, 2022), afirmou que essa simplificação é incorreta: “... *Querer realizar os cálculos dessa forma é cometer um erro conceitual de matemática, pois, para justificar a operação, foi executada uma operação ilegal, sem o menor fundamento matemático, que desrespeita as propriedades matemáticas comprovadas ao longo dos séculos*”. Tal como já houvera escrito às páginas 123/124: “... *esta operação é vedada e nada mais. ... este argumento não é matematicamente aceito pelo simples fato de ... não ser possível de expressar através de uma lei, uma fórmula algébrica válida para todo e qualquer n ... a operação ... não é válida!*”

Embora a segunda expressão possa parecer uma simplificação lógica, matematicamente não são equivalentes. A simplificação não é possível, pois não há termos semelhantes que possam ser cancelados ou agrupados de forma a produzir a segunda expressão. A primeira expressão é uma soma, tanto no numerador como no denominador. A simplificação de frações com somas só é possível se houver um fator comum em todos os termos do numerador e do denominador. Neste caso, a inviabilidade da simplificação se origina em que a soma dos termos é uma série aritmética que não se reduz a uma expressão mais simples. É necessário calcular cada termo, em separado, e depois somá-los.

O conceito de equivalência é fundamental em matemática financeira, e pode ou deve ser demonstrada sob diferentes prismas, principal e justamente quanto à reversibilidade das operações. E isso não ocorre com a incorreta simplificação.

Considerando $i\% = 10\%$, $n = 4$ e $m = 1$:

 Expressão original:

$$\frac{1 + i\% \cdot (n - m)}{1 + i\% \cdot n} = \frac{1 + 0,10 \cdot (4 - 1)}{1 + 0,10 \cdot 4} = \frac{1 + 0,10 \cdot 3}{1 + 0,40} = \frac{1 + 0,30}{1,40} = \frac{1,30}{1,40} \approx 0,92857$$

 Expressão comparativa:

$$\frac{1}{1 + i\% \cdot m} = \frac{1}{1 + 0,10 \cdot 1} = \frac{1}{1,10} \approx 0,90909$$

Ocorrem diferenças, também em $m = 2$: a expressão original resulta em 0,85714, e a indevida simplificação, 0,83333. Em $m = 3$: 0,78571 x 0,76923

A igualdade somente ocorre em $m = n = 4$: 0,71428 x 0,71428, quando $n = m = 4$. Isso acontece porque, para a primeira expressão, o termo “ $n-m$ ” se torna zero, e a expressão se reduz a $\frac{1}{1 + (i\% \cdot n)}$, que é exatamente a forma da segunda expressão para “ $m=n$ ”.

Portanto, as expressões não são equivalentes, pois a segunda não é uma simplificação correta da primeira em todos os casos, exceto quando “ $m=n$ ”. Em matemática financeira, a precisão é crucial, e usar a expressão incorreta pode levar a resultados significativamente errados.

A simplificação de

$$\frac{1 + [i\% \cdot (n - m)]}{1 + (i\% \cdot n)}$$

é

$$1 - \frac{i\% \cdot m}{1 + (i\% \cdot n)}$$

Este tema será retomado na análise do sistema de amortização dito a juros simples, MEJS, abreviatura de um dito Método de Equivalência a Juros Simples, também denominado de SAL – Sistema de Amortização Linear, ou SPCPC – Sistema de Prestações Constantes a Juros Simples, ou, ainda, SACS – Sistema de Amortização com Capitalização Simples.

CAPÍTULO 9 - SALDOS DEVEDORES A CADA MOMENTO. ARTIGO 368 DO CÓDIGO CIVIL.

Se há um débito inicial, valor presente ou capital inicial em $m = 0$, e diversos pagamentos no transcurso do prazo contratado, “ $m = n$ ” prestações postecipadas, mediante aplicação gradativa da taxa de juros “ $i\%$ ”, a cada momento haverá saldos devedores intermediários, momento a momento, de $m = 1$ até $m = n - 1$, que, por lógica, ao final, no momento final “ $m = n$ ”, deverão acarretar o valor final zero, após a quitação da última parcela do financiamento.

Mas, também, conforme está previsto no artigo 368 do Código Civil Brasileiro, há o princípio da compensação gradativa entre débitos e créditos, que, ao final, deverão se anular:

“Art. 368. Se duas pessoas forem ao mesmo tempo credor e devedor uma da outra, as duas obrigações extinguem-se, até onde se compensarem.”

Esse preceito legal é perfeitamente aplicável aos financiamentos, em que há um capital inicial e diversas prestações que, gradativamente, amortizam a dívida e, ao final, devem quitá-la.

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Nesse ponto, também, de forma inédita na bibliografia da Matemática Financeira, pode-se afirmar aquilo que, conceitualmente, é óbvio, mas não se constata que, antes, tenha sido dito ou escrito: tanto pela disposição do artigo 368 do Código Civil Brasileiro, como pela lógica matemática, demonstra-se que, em cada momento de apuração de mais esta verba derivada, o saldo devedor será sempre resultante da diferença entre o capital inicial jurificado e a soma das prestações fixas jurificadas, desde o instante de suas respectivas ocorrências.

CAPÍTULO 10 - SALDOS DEVEDORES A JUROS COMPOSTOS

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

$$SD_{JCm} = PV \cdot (1+i\%)^m - [PMT_{JC} \cdot m + (\sum PMT_{JC} \text{ de } 1 \text{ até } m \cdot (1+i\%)^{m - [\text{de } 1 \text{ até } m]})]$$

Momento 1

$$FV_{JC1} \text{ de } PV = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^1$$

$$FV_{JC1} \text{ de } PV = 4.400,00 \times 1,10$$

$$FV_{JC1} \text{ de } PV = 4.840,00$$

$$FV_{JC1} \text{ de } PMT_{JC1} = 1.388,07 \times (1 + 10\%)^{1-1}$$

$$FV_{JC1} \text{ de } PMT_{JC1} = 1.388,07 \times 1,10^0$$

$$FV_{JC1} \text{ de } PMT_{JC1} = 1.388,07 \times 1$$

$$FV_{JC1} \text{ de } PMT_{JC1} = 1.388,07$$

$$SD_{JC1} = 4.840,00 - 1.388,07$$

$$SD_{JC1} = 3.451,93$$

Momento 2

$$FV_{JC2} \text{ de } PV = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^2$$

$$FV_{JC2} \text{ de } PV = 4.400,00 \times 1,21$$

$$FV_{JC2} \text{ de } PV = 5.324,00$$

$$FV_{JC2} \text{ de } PMT_{JC1} = 1.388,07 \times (1 + 10\%)^{2-1}$$

$$FV_{JC2} \text{ de } PMT_{JC1} = 1.388,07 \times 1,10^1$$

$$FV_{JC2} \text{ de } PMT_{JC1} = 1.388,07 \times 1,10$$

$$FV_{JC2} \text{ de } PMT_{JC1} = 1.526,08$$

$$FV_{JC2} \text{ de } PMT_{JC2} = 1.388,07 \times (1 + 10\%)^{2-2}$$

$$FV_{JC2} \text{ de } PMT_{JC2} = 1.388,07 \times 1,10^0$$

$$FV_{JC2} \text{ de } PMT_{JC2} = 1.388,07 \times 1$$

$$FV_{JC2} \text{ de } PMT_{JC2} = 1.388,07$$

$$SD_{JC2} = 4.400,00 - 1.526,88 - 1.388,07 = 4.400,00 - 2.914,95$$

$$SD_{JC2} = 2.409,05$$

Momento 3

$$FV_{JC3} \text{ de } PV = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^3$$

$$FV_{JC3} \text{ de } PV = 4.400,00 \times 1,331$$

$$FV_{JC3} \text{ de } PV = 5.856,40$$

$$FV_{JC3} \text{ de } PMT_{JC1} = 1.388,07 \times (1 + 10\%)^{3-1}$$

$$FV_{JC3} \text{ de } PMT_{JC1} = 1.388,07 \times 1,10^2$$

$$FV_{JC3} \text{ de } PMT_{JC1} = 1.388,07 \times 1,21$$

$$FV_{JC3} \text{ de } PMT_{JC1} = 1.679,56$$

$$FV_{JC3} \text{ de } PMT_{JC2} = 1.388,07 \times (1 + 10\%)^{3-2}$$

$$FV_{JC3} \text{ de } PMT_{JC2} = 1.388,07 \times 1,10^1$$

$$FV_{JC3} \text{ de } PMT_{JC2} = 1.388,07 \times 1,10$$

$$FV_{JC3} \text{ de } PMT_{JC2} = 1.526,88$$

$$FV_{JC3} \text{ de } PMT_{JC3} = 1.388,07 \times (1 + 20\%)^{3-3}$$

$$FV_{JC3} \text{ de } PMT_{JC3} = 1.388,07 \times 1,20^0$$

$$FV_{JC3} \text{ de } PMT_{JC3} = 1.388,07 \times 1$$

$$FV_{JC3} \text{ de } PMT_{JC3} = 1.388,07$$

$$SD_{JC3} = 5.856,40 - 1.679,57 - 1.526,88 - 1.388,07 = 5.856,40 - 4.594,52$$

$$SD_{JC3} = 1.261,88$$

Momento 4

$$FV_{JC4} \text{ de } PV = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^4$$

$$FV_{JC4} \text{ de } PV = 4.400,00 \times 1,4641$$

$$FV_{JC4} \text{ de } PV = 6.442,04$$

$$FV_{JC4} \text{ de } PMT_{JC1} = 1.388,07 \times (1 + 10\%)^{4-1}$$

$$FV_{JC4} \text{ de } PMT_{JC1} = 1.388,07 \times 1,10^3$$

$$FV_{JC4} \text{ de } PMT_{JC1} = 1.388,07 \times 1,331$$

$$FV_{JC4} \text{ de } PMT_{JC1} = 1.847,52$$

$$FV_{JC4} \text{ de } PMT_{JC2} = 1.388,07 \times (1 + 10\%)^{4-2}$$

$$FV_{JC4} \text{ de } PMT_{JC2} = 1.388,07 \times 1,10^2$$

$$FV_{JC4} \text{ de } PMT_{JC2} = 1.388,07 \times 1,21$$

$$FV_{JC4} \text{ de } PMT_{JC2} = 1.679,56$$

$$FV_{JC4} \text{ de } PMT_{JC3} = 1.388,07 \times (1 + 10\%)^{4-3}$$

$$FV_{JC4} \text{ de } PMT_{JC3} = 1.388,07 \times 1,10^1$$

$$FV_{JC4} \text{ de } PMT_{JC3} = 1.388,07 \times 1,10$$

$$FV_{JC4} \text{ de } PMT_{JC3} = 1.526,88$$

$$FV_{JC4} \text{ de } PMT_{JC4} = 1.388,07 \times (1 + 10\%)^{4-4}$$

$$FV_{JC4} \text{ de } PMT_{JC4} = 1.388,07 \times 1,10^0$$

$$FV_{JC4} \text{ de } PMT_{JC4} = 1.388,07 \times 1$$

$$FV_{JC4} \text{ de } PMT_{JC4} = 1.388,07$$

$$SD_{JC4} = 6.442,04 - 1.847,53 - 1.679,56 - 1.526,88 - 1.388,07 = 6.442,04 - 6.442,04$$

$$SD_{JC4} = 0,00$$

Comprova-se, assim, sob juros compostos, que as duas verbas jurificadas, capital inicial e prestações, são suficientes para expressar a consistência do sistema de amortização, em cada momento, sempre, resultando no correto saldo devedor intermediário.

CAPÍTULO 11 - SALDOS DEVEDORES A JUROS SIMPLES

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

$$SD_{JSm} = PV \cdot [(1 + (i\% \cdot m))] - \{PMT_{JS} \cdot m + \sum PMT_{JS \text{ de } 1 \text{ até } m} \cdot 1 + [i\% \cdot m - (\text{de } 1 \text{ até } m)]\}$$

Momento 1

$$FV_{JS1} \text{ de } PV = 4.400,00 \times [1 + (10\% \times 1)]$$

$$FV_{JS1} \text{ de } PV = 4.400,00 \times 1,10$$

$$FV_{JS1} \text{ de } PV = 4.840,00$$

$$FV_{JS1} \text{ de } PMT_{JS1} = 1.339,13 \times \{1 + [10\% \times (1-1)]\}$$

$$FV_{JS1} \text{ de } PMT_{JS1} = 1.339,13 \times (1 + 0)$$

$$FV_{JS1} \text{ de } PMT_{JS1} = 1.339,13 \times 1$$

$$FV_{JS1} \text{ de } PMT_{JS1} = 1.339,13$$

$$SD_{JS1} = 4.840,00 - 1.339,13$$

$$SD_{JS1} = 3.500,87$$

Momento 2

$$FV_{JS2} \text{ de } PV = 4.400,00 \times (1 + 10\% \times 2)$$

$$FV_{JS2} \text{ de } PV = 4.400,00 \times 1,20$$

$$FV_{JS2} \text{ de } PV = 5.280,00$$

$$FV_{JS2} \text{ de } PMT_{JS1} = 1.339,13 \times [1 + 10\% \times (2-1)]$$

$$FV_{JS2} \text{ de } PMT_{JS1} = 1.339,13 \times 1,10$$

$$FV_{JS2} \text{ de } PMT_{JS1} = 1.473,04$$

$$FV_{JS2} \text{ de } PMT_{JS2} = 1.339,13 \times (1 + 10\% \times (2-2))$$

$$FV_{JS2} \text{ de } PMT_{JS2} = 1.339,13 \times 1,00$$

$$FV_{JS2} \text{ de } PMT_{JS2} = 1.339,13 \times 1$$

$$FV_{JS2} \text{ de } PMT_{JS2} = 1.339,13$$

$$SD_{JS2} = 5.280,00 - 1.473,04 - 1.339,13 = 5.280,00 - 2.812,17$$

$$SD_{JS2} = 2.467,83$$

Momento 3

$$FV_{JS3} \text{ de } PV = 4.400,00 \times (1 + 10\% \times 3)$$

$$FV_{JS3} \text{ de } PV = 4.400,00 \times 1,30$$

$$FV_{JS3} \text{ de } PV = 5.720,00$$

$$FV_{JS3} \text{ de } PMT_{JS1} = 1.339,13 \times [(1 + 10\% \times (3-1))]$$

$$FV_{JS3} \text{ de } PMT_{JS1} = 1.339,13 \times (1 + 10\% \times 2)$$

$$FV_{JS3} \text{ de } PMT_{JS1} = 1.339,13 \times 1,20$$

$$FV_{JS3} \text{ de } PMT_{JS1} = 1.606,96$$

$$FV_{JS3} \text{ de } PMT_{JS2} = 1.339,13 \times [1 + 10\% \times (3-2)]$$

$$FV_{JS3} \text{ de } PMT_{JS2} = 1.339,13 \times (1 + 10\% \times 1)$$

$$FV_{JS3} \text{ de } PMT_{JS2} = 1.339,13 \times 1,10$$

$$FV_{JS3} \text{ de } PMT_{JS2} = 1.473,04$$

$$FV_{JS3} \text{ de } PMT_{JS3} = 1.339,13 \times [1 + 10\% \times (3-3)]$$

$$FV_{JS3} \text{ de } PMT_{JS3} = 1.339,13 \times (1 + 10\% \times 0)$$

$$FV_{JS3} \text{ de } PMT_{JS3} = 1.339,13 \times 1,00$$

$$FV_{JS3} \text{ de } PMT_{JS3} = 1.339,13$$

$$SD_{JS3} = 5.720,00 - 1.606,96 - 1.473,04 - 1.339,13 = 5.720,00 - 4.419,13$$

$$SD_{JS3} = 1.300,87$$

Momento 4

$$FV_{JS4} \text{ de } PV = 4.400,00 \times (1 + 10\% \times 4)$$

$$FV_{JS4} \text{ de } PV = 4.400,00 \times 1,40$$

$$FV_{JS4} \text{ de } PV = 6.160,00$$

$$FV_{JS4} \text{ de } PMT_{JS1} = 1.339,13 \times [1 + 10\% \times (4-1)]$$

$$FV_{JS4} \text{ de } PMT_{JS1} = 1.339,13 \times (1 + 10\% \times 3)$$

$$FV_{JS4} \text{ de } PMT_{JS1} = 1.339,13 \times 1,30$$

$$FV_{JS4} \text{ de } PMT_{JS1} = 1.740,87$$

$$FV_{JS4} \text{ de } PMT_{JS1} = 1.339,13 \times [(1 + 10\% \times (4-2))$$

$$FV_{JS4} \text{ de } PMT_{JS1} = 1.339,13 \times (1 + 10\% \times 2)$$

$$FV_{JS4} \text{ de } PMT_{JS1} = 1.339,13 \times 1,20$$

$$FV_{JS4} \text{ de } PMT_{JS1} = 1.606,96$$

$$FV_{JS4} \text{ de } PMT_{JS2} = 1.339,13 \times [1 + 10\% \times (4-3)]$$

$$FV_{JS4} \text{ de } PMT_{JS2} = 1.339,13 \times (1 + 10\% \times 1)$$

$$FV_{JS4} \text{ de } PMT_{JS2} = 1.339,13 \times 1,10$$

$$FV_{JS4} \text{ de } PMT_{JS2} = 1.473,04$$

$$FV_{JS4} \text{ de } PMT_{JS3} = 1.339,13 \times [1 + 10\% \times (4-4)]$$

$$FV_{JS4} \text{ de } PMT_{JS3} = 1.339,13 \times (1 + 10\% \times 0)$$

$$FV_{JS4} \text{ de } PMT_{JS3} = 1.339,13 \times 1,00$$

$$FV_{JS4} \text{ de } PMT_{JS3} = 1.339,13$$

$$SD_{JS4} = 6.160,00 - 1.740,87 - 1.606,96 - 1.473,04 - 1.339,13 = 6.160,00 - 6.160,00$$

$$SD_{JS4} = 0,00$$

Comprova-se, assim, sob juros simples, que as duas verbas jurificadas, capital inicial e prestações, são suficientes para expressar a consistência do sistema de amortização, em cada momento, sempre, resultando no correto saldo devedor intermediário.

CAPÍTULO 12 - SALDOS DEVEDORES EM PROGRESSÕES

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Ainda, de forma inédita na bibliografia da Matemática Financeira, pode-se afirmar aquilo que, conceitualmente, é óbvio, mas não se constata que, antes, tenha sido dito ou escrito, pelo menos desta forma e com este enfoque:

com amparo no clássico, consolidado e incontestável modelo das progressões, geométricas ou aritméticas, em casos de prestações iguais entre si, a cada momento do transcurso do prazo, o saldo devedor será sempre igual à DIFERENÇA entre

(1) o “enésimo” termo da progressão formada, a partir do termo inicial ($a_1 = PV =$ valor presente), em $m=0$, à razão (“ $1 + q$ ” ou “ r ”), termo a termo, em cada momento do prazo do financiamento, até o último termo; e

(2) a soma de todos os termos da progressão formada pelas prestações, desde a primeira, em $m=1$, até a do momento em que estiver sendo apurado o saldo devedor.

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Saldos devedores a juros compostos, com base em progressões geométricas

$$a_m \text{ PG PV} = a_1 \text{ PV} \cdot q^{tPV-1} = a_1 \text{ PV} \cdot q^{mPV}$$

$$FV_{JCm} = a_m \text{ PG PV} = a_1 \text{ PV} \cdot q^{mPV} = PV \cdot (1 + i\%)^{tPV-1} = PV \cdot (1 + i\%)^{mPV}$$

(-)

$$S_m \text{ PG PMT} = a_1 \text{ PG PMT} \cdot \frac{q^{tPMT}-1}{q-1} = PMT_{JC} \cdot \frac{q^{tPMT}-1}{q-1}$$

Conhecidos PV, $i\%$, n , PMT_{JCm} , em cada momento m , o saldo devedor pode ser apurado, através da expressão:

$$SD_{JCm} = PV \cdot (1 + i\%)^m - PMT_{JCm} \cdot \frac{(1 + i\%)^m - 1}{(1 + i\%) - 1}$$

ou

$$SD_{JCm} = PV \cdot (1 + i\%)^m - PMT_{JCm} \cdot \frac{(1 + i\%)^m - 1}{i\%}$$

Momento 0: Não há prestações a serem compensadas.

Saldo devedor $SD_{JC0} = 4.400,00$

$$a_{0PG} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^{0+1-1} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^0 = 4.400,00 \times 1,10^0 = 4.400,00$$

$$SD_{JC0} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^0$$

$$SD_{JC0} = 4.400,00$$

Momento 1

$$a_{1PG} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^{1+1-1} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^1 = 4.400,00 \times 1,10^1$$

$$(-) S_{1PG} = 1.388,07 \times [(1+10\%)^1 - 1] / [(1+10\%) - 1] = 1.388,07 \times 0,10 / 0,10$$

$$SD_{JC1} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^1 - 1.388,07 \times \frac{(1 + 10\%)^1 - 1}{(1 + i\%) - 1}$$

$$SD_{JC1} = 4.400,00 \times 1,10 - 1.388,07 \times \frac{1,10 - 1}{1,10 - 1}$$

$$SD_{JC1} = 4.840,00 - 1.388,07$$

$$SD_{JC1} = 3.451,93$$

Momento 2

$$a_{2PG} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^{2+1-1} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^2 = 4.400,00 \times 1,10^2$$

$$(-) S_{2PG} = 1.388,07 \times [(1+10\%)^2 - 1] / [(1+10\%) - 1] = 1.388,07 \times 0,21 / 0,10$$

$$SD_{JC2} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^2 - 1.388,07 \times \frac{(1 + 10\%)^2 - 1}{(1 + i\%) - 1}$$

$$SD_{JC2} = 4.400,00 \times 1,21 - 1.388,07 \times \frac{1,21 - 1}{1,10 - 1}$$

$$SD_{JC2} = 5.324,00 - 2.914,95$$

$$SD_{JC2} = 2.409,05$$

Momento 3

$$a_{3PG} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^{3+1-1} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^3 = 4.400,00 \times 1,10^3$$

$$(-) S_{3PG} = 1.388,07 \times [(1+10\%)^3 - 1] / [(1+10\%) - 1] = 1.388,07 \times 0,331 / 0,10$$

$$SD_{JC3} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^3 - 1.388,07 \times \frac{(1 + 10\%)^3 - 1}{(1 + i\%) - 1}$$

$$SD_{JC3} = 4.400,00 \times 1,331 - 1.388,07 \times \frac{1,331 - 1}{1,10 - 1}$$

$$SD_{JC3} = 5.856,40 - 4.594,52$$

$$SD_{JC3} = 3.451,93$$

Momento 4

$$a_{4PG} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^{4+1-1} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^4 = 4.400,00 \times 1,10^4$$

$$(-) S_{4PG} = 1.388,07 \times [(1+10\%)^4 - 1] / [(1+10\%) - 1] = 1.388,07 \times 0,4641 / 0,10$$

$$SD_{JC4} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^4 - 1.388,07 \times \frac{(1 + 10\%)^4 - 1}{(1 + i\%) - 1}$$

$$SD_{JC4} = 4.400,00 \times 1,4641 - 1.388,07 \times \frac{1,4641 - 1}{1,10 - 1}$$

$$SD_{JC4} = 6.442,04 - 6.442,04$$

$$SD_{JC4} = 0,00$$

Resta, assim, comprovado que, sob juros compostos, tanto se forem obtidos pela aplicação da lei do valor do dinheiro no tempo, como pela aplicação correta, sem malabarismos cerebrais, dos conceitos irrefutáveis da progressão geométrica, os saldos devedores, desde o momento “0” até o momento “n”, são exatamente iguais.

SalDOS devedores pela diferença entre valores jurificados, na forma composta, do capital inicial e soma das prestações

Momento m	Períodos vencidos (n-m)	Juro sobre saldo devedor anterior	Capital inicial jurificado $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$	Valor da prestação periódica a juros compostos	Valor jurificado da prestação periódica	Soma das prestações periódicas jurificadas $S_n = a_1 \cdot [(q^n - 1) / (q - 1)]$	Saldo devedor: diferença entre valores jurificados do capital inicial e a soma das prestações anteriores
0	4		4.400,00				4.400,00
1	3	440,00	4.840,00	1.388,07	1.388,07	1.388,07	3.451,93
2	2	345,19	5.324,00	1.388,07	1.526,88	2.914,95	2.409,05
3	1	240,90	5.856,40	1.388,07	1.679,57	4.594,52	1.261,88
4	0	126,19	6.442,04	1.388,07	1.847,52	6.442,04	0,00

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

SalDOS devedores a juros simples, com base em progressões aritméticas

$$a_{m \text{ PA PV}} = a_{1 \text{ PV}} \cdot [r \cdot (t_{\text{PV}} - 1)]$$

$$FV_{JSm} = a_{m \text{ PA PV}} = PV \cdot [1 + (i\% \cdot m_{\text{PV}})]$$

(-)

$$S_{m \text{ PA PMT}} = a_{1 \text{ PMT}} + a_{m \text{ PMT}} \cdot \frac{t}{2}$$

$$a_{m \text{ PA PMT}} = a_{1 \text{ PMT}} \cdot \{1 + [r \cdot (t_{\text{PMT}} - 1)]\}$$

$$S_{m \text{ PA PMT}} = \{a_{1 \text{ PMT}} + a_{1 \text{ PMT}} \cdot [1 + r \cdot (t_{\text{PMT}} - 1)]\} \cdot \frac{t_{\text{PMT}}}{2}$$

$$S_{m \text{ PA PMT}} = \{a_{1 \text{ PMT}} \cdot [2 + r \cdot (t_{\text{PMT}} - 1)]\} \cdot \frac{t_{\text{PMT}}}{2}$$

Conhecidos PV, i%, n, PMT, em cada momento m, o saldo devedor pode ser apurado, através da expressão:

$$SD_{JSm} = PV \cdot [1 + (i\% \cdot m)] - \{PMT_{JS} \cdot [2 + i\% \cdot (m - 1)]\} \cdot \frac{m}{2}$$

Momento 0: Não há prestações a serem compensadas

$$a_{0PA} = 4.400,00 \times \{1 + [10\% \times (0+1-1)]\} = 4.400,00 \times [1 + (10\% \times 0)] = 4.400,00 \times (1+10\%)$$

$$SD_{JS0} = 4.400,00 \times [1 + (10\% \times 0)]$$

$$SD_{JS0} = 4.400,00 \times 1,00 = 4.400,00$$

$$SD_{JS0} = 4.400,00$$

Momento 1

$$a_{1PA} = 4.400,00 \times \{1 + [10\% \times (1+1-1)]\} = 4.400,00 \times [1 + (10\% \times 1)] = 4.400,00 \times (1+10\%)$$

$$(-) S_{1PA} = \{1.339,13 + [1.339,13 \times 1 + (10\% \times 1-1)]\} \times 1 / 2$$

$$SD_{JS1} = 4.400,00 \times [1 + (10\% \times 1)] - (1.339,13 \times [2 + 10\% \times (1 - 1)]) \times \frac{1}{2}$$

$$SD_{JS1} = 4.400,00 \times 1,10 - 1.339,13 \times 2 \times \frac{1}{2}$$

$$SD_{JS1} = 4.840,00 - 1.339,13 = 3.500,87$$

Momento 2

$$a_{2PA} = 4.400,00 \times \{1 + [10\% \times (2+1-1)]\} = 4.400,00 \times [1 + (10\% \times 2)] = 4.400,00 \times (1+20\%)$$

$$(-) S_{2PA} = \{1.339,13 + [1.339,13 \times 1 + (10\% \times 2-1)]\} \times 2 / 2$$

$$SD_{JS2} = 4.400,00 \times [1 + (10\% \times 2)] - (1.339,13 \times [2 + 10\% \times (2 - 1)]) \times \frac{2}{2}$$

$$SD_{JS2} = 4.400,00 \times 1,20 - 1.339,13 \times 2,10 \times \frac{2}{2}$$

$$SD_{JS2} = 4.840,00 - 2.812,17 = 2.467,83$$

Momento 3

$$a_{3PA} = 4.400,00 \times \{1 + [10\% \times (3+1-1)]\} = 4.400,00 \times [1 + (10\% \times 3)] = 4.400,00 \times (1+30\%)$$

$$(-) S_{3PA} = \{1.339,13 + [1.339,13 \times 1 + (10\% \times 3-1)]\} \times 3 / 2$$

$$SD_{JS3} = 4.400,00 \times [1 + (10\% \times 3)] - (1.339,13 \times [2 + 10\% \times (3 - 1)]) \times \frac{3}{2}$$

$$SD_{JS3} = 4.400,00 \times 1,30 - 1.339,13 \times 2,20 \times \frac{3}{2}$$

$$SD_{JS3} = 5.720,00 - 4.419,13 = 1.300,87$$

Momento 4

$$a_{4PA} = 4.400,00 \times \{1 + [10\% \times (4+1-1)]\} = 4.400,00 \times [1 + (10\% \times 4)] = 4.400,00 \times (1+40\%)$$

$$(-) S_{4PA} = \{1.339,13 + [1.339,13 \times 1 + (10\% \times 4-1)]\} \times 4 / 2$$

$$SD_{JS4} = 4.400,00 \times [1 + (10\% \times 4)] - (1.339,13 \times [2 + 10\% \times (4 - 1)]) \times \frac{4}{2}$$

$$SD_{JS4} = 4.400,00 \times 1,40 - 1.339,13 \times 2,30 \times \frac{4}{2}$$

$$SD_{JS4} = 6.160,00 - 6.160,00 = 0,00$$

Saldos devedores pela diferença entre valores jurificados, na forma simples, do capital inicial e soma das prestações

Momento m	Períodos vinctendos (n-m)	Juro sobre capital inicial	Capital inicial jurificado: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$	Valor da prestação periódica a juros simples	Valor jurificado da prestação periódica	Soma das prestações periódicas jurificadas: $S_n = [(a_1 + a_n) \cdot n] / 2$	Saldo devedor: diferença entre valores jurificados do capital inicial e a soma das prestações anteriores
0	4		4.400,00				4.400,00
1	3	440,00	4.840,00	1.339,13	1.339,13	1.339,13	3.500,87
2	2	440,00	5.280,00	1.339,13	1.473,04	2.812,17	2.467,83
3	1	440,00	5.720,00	1.339,13	1.606,96	4.419,13	1.300,87
4	0	440,00	6.160,00	1.339,13	1.740,87	6.160,00	0,00

Resta, assim, comprovado que, sem malabarismos cerebrais, convenções teóricas ou artifícios abstratos, sob juros simples, tanto se forem obtidos pela aplicação da lei do valor do dinheiro no tempo, como pela aplicação correta dos conceitos irrefutáveis da progressão aritmética, os saldos devedores, desde o momento “0” até o momento “n”, são exatamente iguais.

CAPÍTULO 13 - COTAS DE JUROS NAS PRESTAÇÕES FIXAS. ARTIGO 354 DO CÓDIGO CIVIL.

Os valores corretos das prestações e dos saldos devedores, tendo como referência os valores presente e futuro, já seriam suficientes para que o sistema de amortização fosse considerado consistente, ou não.

Mas há alegada exigência tributária e contábil de que se deva, também, cindir cada valor de prestação em uma parte de (cota de) juros e uma parte de capital (cota de amortização).

O artigo 354, do Código Civil Brasileiro, dispõe:

“Havendo capital e juros, o pagamento imputar-se-á primeiro nos juros vencidos, e depois no capital, ...”

Conforme já demonstrado anteriormente, a capitalização composta a partir do capital inicial acarreta a incidência gradativa e cumulativa de juros sobre os sucessivos saldos devedores (SD) anteriores.

Por outro lado, a capitalização simples de juros também incide sobre os sucessivos saldos devedores (SD) anteriores, MAS deduzidos da soma dos valores dos juros anteriores ($\sum J_{ant}$), de modo que, a cada momento, a base de cálculo é sempre o valor do capital inicial (PV).

Esse mesmo princípio é aplicável em caso de sistemas de amortização, em que, a cada momento “m”, há a compensação gradativa das verbas que constituem débitos e créditos.

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

A cota de juros em cada prestação resulta:

a) sob juros compostos, da multiplicação da taxa predeterminada pela diferença entre:

a1) o capital inicial jurificado até o momento anterior “m-1” (PV_{m-1});

a2) e a soma das prestações também “jurificadas” e ocorridas até o momento anterior “m-1” ($\sum PMT_{de 1 \text{ até } m-1}$);

que equivale à diferença entre as cotas de juro sobre o capital inicial jurificado até o momento anterior “m-1” (PV_{m-1}) e a soma das prestações também “jurificadas” e ocorridas até o momento anterior “m-1” ($\sum PMT_{de 1 \text{ até } m-1}$).

b) sob juros simples, da multiplicação da taxa predeterminada pela diferença entre:

b1) o capital inicial jurificado até o momento anterior “m-1” (PV_{m-1});

b2) e a soma das

b2.1) prestações também “jurificadas” e ocorridas até o momento anterior “m-1” ($\sum PMT_{de 1 \text{ até } m-1}$);

b2.2. com o juro sobre a soma nominal acumulada das cotas de juros anteriores, desde a primeira até o momento “m – 1”.

Há mais formas alternativas de apurar as cotas de juros contidas em cada prestação:

***** sob juros compostos, mediante multiplicação da taxa predeterminada pelo saldo devedor anterior;**

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

***** sob juros simples, mediante multiplicação da taxa predeterminada pela diferença entre o saldo devedor anterior e a soma nominal das cotas de juros anteriores.**

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

**** Ainda, sob juros simples, a cota de juros contida em cada prestação pode ser obtida mediante a multiplicação da taxa predeterminada pela diferença entre:**

- * o capital inicial;**
- * e a soma nominal das prestações anteriores.**

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Ou, também, a diferença entre:

- * o valor da cota de juros da primeira prestação;***
- * e a multiplicação da taxa predeterminada pela prestação e o valor do período anterior.***

A cota de amortização resulta da diferença entre o valor da prestação e a cota de juros.

E o saldo devedor corresponde à subtração entre o saldo devedor anterior e a cota de amortização.

CAPÍTULO 14 - COTAS DE JUROS COMPOSTOS NAS PRESTAÇÕES FIXAS

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

$$CJ_{PMTm} = i\% \cdot \{[PV \cdot (1+i\%)^{m-1}] - [PMT_{JC} \cdot m + (\sum PMT_{JC} \text{ de } 1 \text{ até } m \cdot (1+i\%)^{m - [\text{de } 1 \text{ até } m]})]\}$$

Momento 0

INEXISTE cota de juro sobre capital inicial, prestações e cotas de juros anteriores.

Momento 1

No momento anterior, $m = 0$, só há capital inicial, $PV = FV_0 = 4.400,00$, sem prestações.

A cota de juros, 440,00, é exatamente a mesma da evolução do capital inicial para pagamento em parcela única.

A cota líquida de juros, neste momento, é a diferença entre 440,00 e 0,00, resultando em 440,00, mesmo valor obtido pela multiplicação do saldo anterior, 4.400,00, pela taxa predeterminada de juros, 10%.

$$CJ_{PMTJC1} = CJ_{PV \text{ jurificado até } 0} - CJ_{\sum PMTJC \text{ de } 1 \text{ até } m-1 \text{ (inexistentes em } 0)}$$

$$CJ_{PVJC0} = PV_{\text{jurificado até } 0} \times i\% = 4.400,00 \times 10\% = 440,00$$

$$CJ_{\sum PMTJC \text{ jurificadas de } 1 \text{ até } m-1} = \sum PMT_{JC} \text{ jurificadas de } 1 \text{ até } m-1 \text{ (inexistentes em } 0) \times i\% = 0,00 \times 10\% = 0,00$$

$$CJ_{PMTJC1} = 440,00 - 0,00 = 440,00$$

ou

$$CJ_{PMTJC1} = SD_0 \cdot i\%$$

$$CJ_{PMTJC1} = 4.400,00 \times 10\%$$

$$CJ_{PMTJC1} = 440,00$$

Por progressão geométrica:

$$CJ_{PMTJC1} = 10\% \times$$

$$a_{0PG} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^{0+1-1} = 4.400,00 \times 1,10^0$$

$$(-) S_{0PG} = 1.388,07 \times \frac{(1 + 10\%)^0 - 1}{(1 + 10\%) - 1}$$

$$CJ_{PMTJC1} = 10\% \times [4.400,00 \times 1,00] (-) 1.388,07 \times \frac{0,00}{0,10}$$

$$CJ_{PMTJC1} = 10\% \times [4.400,00 (-) 0,00]$$

$$CJ_{PMTJC1} = 4.400,00 \times 10\%$$

$$CJ_{PMTJC1} = 440,00$$

$$CA_{PMTJC1} = PMT_{JC} - CJ_{PMTJC1} = 1.388,07 - 440,00$$

$$CA_{PMTJC1} = 948,07$$

$$SD_1 = SD_0 - CA_{PMTJC1} = 4.400,00 - 948,07$$

$$SD_1 = 3.451,93$$

Momento 2

No momento anterior, $m = 1$, o capital inicial jurificado é $FV_{JC1} = 4.840,00$ ($4.400,00 \times 1,1$).

A cota de juros sobre FV_{JC1} , em m_2 , de 484,00, é exatamente a mesma da evolução do capital inicial para pagamento em parcela única, sem prestações.

Mas, a partir de $m = 1$, há ocorrência de prestação, $PMT_{JC1} = 1.388,07$, que inicia a amortização do financiamento, com juros reversos de 138,807.

A cota líquida de juros, neste momento, é a diferença entre 440,00 e 138,807, resultando em 345,19, mesmo valor obtido pela multiplicação do saldo anterior, 3.451,93, pela taxa predeterminada de juros, 10%.

$$CJ_{PMTJC2} = CJ_{PV \text{ jurificado até } 1} - CJ_{\sum PMTJC \text{ jurificadas de } 1 \text{ até } 1}$$

$$CJ_{PVJC1} = PV_{\text{jurificado até } 1} \times i\% = 4.840,00 \times 10\% = 484,00$$

$$CJ_{\sum PMTJC \text{ jurificadas de } 1 \text{ até } 1} = \sum PMT_{JC} \text{ jurificadas de } 1 \text{ até } 1 \times i\% = 1.388,07 \times 10\% = 138,807$$

$$CJ_{PMTJC2} = 484,00 - 138,81 = 345,19$$

ou

$$CJ_{PMTJC2} = SD_1 \cdot i\%$$

$$CJ_{PMTJC2} = 3.451,93 \times 10\%$$

$$CJ_{PMTJC2} = 345,19$$

Por progressão geométrica:

$$CJ_{PMTJC2} = 10\% \times$$

$$a_{1PG} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^{1+1-1} = 4.400,00 \times 1,10^1$$

$$(-) S_{1PG} = 1.388,07 \times \frac{(1 + 10\%)^1 - 1}{(1 + 10\%) - 1} = 1.388,07 \times \frac{1,10 - 1}{1,10 - 1}$$

$$CJ_{PMTJC2} = 10\% \times [4.400,00 \times 1,10] (-) 1.388,07 \times \frac{0,10}{0,10}$$

$$CJ_{PMTJC2} = 10\% \times [4.400,00 \times 1,10] (-) [1.388,07]$$

$$CJ_{PMTJC2} = 10\% \times [4.840,00 (-) 1.388,07]$$

$$CJ_{PMTJC2} = 484,00 (-) 138,807$$

$$CJ_{PMTJC2} = 345,19$$

$$CA_{PMTJC2} = PMT_{JC} - CJ_{PMTJC2} = 1.388,07 - 345,19$$

$$CA_{PMTJC2} = 1.042,88$$

$$SD_2 = SD_1 - CA_{PMTJC1} = 3.451,93 - 1.042,88$$

$$SD_2 = 2.409,05$$

Momento 3

No momento anterior, $m = 2$, o capital inicial jurificado é $FV_{JC2} = 5.324,00$ ($4.400,00 \times 1,21$).

A cota de juros sobre FV_{JC2} , em m_2 , de 532,40, é exatamente a mesma da evolução do capital inicial para pagamento em parcela única, sem prestações.

Mas, até $m = 2$, há ocorrência de duas prestações: $PMT_1 = 1.388,07$, que, jurificada, desde $m = 1$, equivale a 1.526,88 ($1.388,07 \times 1,1$); e $PMT_2 = 1.388,07$.

E a soma dos valores ajustados, 2.914,95, acarreta juros reversos de 291,495.

A cota líquida de juros, neste momento, é a diferença entre 532,40 e 291,495, resultando em 240,90, mesmo valor obtido pela multiplicação do saldo anterior, 2.409,05, pela taxa predeterminada de juros, 10%.

$$CJ_{PMTJC3} = CJ_{PV \text{ jurificado até } 2} - CJ_{\sum PMTJC \text{ jurificadas de } 1 \text{ até } 2}$$

$$CJ_{PVJC2} = PV_{\text{jurificado até } 2} \times i\% = 5.324,00 \times 10\% = 532,40$$

$$CJ_{\sum PMTJC \text{ jurificadas de } 1 \text{ até } 2} = \sum PMT_{JC} \text{ jurificadas de } 1 \text{ até } 2 \times i\% = 2.914,95 \times 10\% = 291,495$$

$$CJ_{PMTJC3} = 532,40 - 291,50 = 240,90$$

ou

$$CJ_{PMTJC3} = SD_2 \cdot i\%$$

$$CJ_{PMTJC3} = 2.409,05 \times 10\%$$

$$CJ_{PMTJC3} = 240,90$$

Por progressão geométrica:

$$CJ_{PMTJC3} = 10\% \times$$

$$a_{2PG} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^{2+1-1} = 4.400,00 \times 1,10^2$$

$$(-) S_{2PG} = 1.388,07 \times \frac{(1 + 10\%)^2 - 1}{(1 + 10\%) - 1} = 1.388,07 \times \frac{1,21 - 1}{1,10 - 1}$$

$$CJ_{PMTJC2} = 10\% \times [4.400,00 \times 1,21] (-) 1.388,07 \times \frac{0,21}{0,10}$$

$$CJ_{PMTJC3} = 10\% \times [4.400,00 \times 1,21] (-) [2.914,95]$$

$$CJ_{PMTJC3} = 10\% \times [5.324,00 (-) 2.914,95]$$

$$CJ_{PMTJC3} = 532,40 (-) 291,495$$

$$CJ_{PMTJC3} = 240,90$$

$$CA_{PMTJC2} = PMT_{JC} - CJ_{PMTJC2} = 1.388,07 - 240,90$$

$$CA_{PMTJC2} = 1.147,17$$

$$SD_3 = SD_2 - CA_{PMTJC3} = 2.409,05 - 1.147,17$$

$$SD_3 = 1.261,88$$

Momento 4

No momento anterior, $m = 3$, o capital inicial jurificado é $FV_{JC3} = 5.856,40$ ($4.400,00 \times 1,331$).

A cota de juros sobre FV_{JC3} , em $m = 3$, de 585,64, é exatamente a mesma da evolução do capital inicial para pagamento em parcela única, sem prestações.

Mas, até $m = 3$, há ocorrência de três prestações: $PMT_1 = 1.388,07$, que, jurificada, desde $m = 1$, equivale a 1.679,57 ($1.388,07 \times 1,21$); $PMT_2 = 1.526,88$ ($1.388,07 \times 1,1$); $PMT_3 = 1.388,07$.

E a soma dos valores ajustados, 4.594,52, acarreta juros reversos de 459,452.

A cota líquida de juros, neste momento, é a diferença entre 585,64 e 459,452 resultando em 126,19, mesmo valor obtido pela multiplicação do saldo anterior, 1.261,88, pela taxa predeterminada de juros, 10%.

$$CJ_{PMTJC4} = CJ_{PV} \text{ jurificado até } 3 - CJ_{\sum PMTJC} \text{ jurificadas de } 1 \text{ até } 3$$

$$CJ_{PVJC3} = PV \text{ jurificado até } 3 \times i\% = 5.856,40 \times 10\% = 585,64$$

$$CJ_{\sum PMTJC} \text{ jurificadas de } 1 \text{ até } 3 = \sum PMT_{JC} \text{ jurificadas de } 1 \text{ até } 3 \times i\% = 4.594,52 \times 10\% = 459,452$$

$$CJ_{PMTJC4} = 126,19$$

ou

$$CJ_{PMTJC4} = SD_3 \cdot i\%$$

$$CJ_{PMTJC4} = 1.261,88 \times 10\%$$

$$CJ_{PMTJC4} = 126,19$$

Por progressão geométrica:

$$CJ_{PMTJC4} = 10\% \times$$

$$a_{3PG} = 4.400,00 \times (1 + 10\%)^{3+1-1} = 4.400,00 \times 1,10^3$$

$$(-) S_{3PG} = 1.388,07 \times \frac{(1 + 10\%)^3 - 1}{(1 + 10\%) - 1} = 1.388,07 \times \frac{1,331 - 1}{1,10 - 1}$$

$$CJ_{PMTJC2} = 10\% \times [4.400,00 \times 1,331] (-) 1.388,07 \times \frac{0,331}{0,10}$$

$$CJ_{PMTJC4} = [4.400,00 \times 1,331] (-) [4.594,5117]$$

$$CJ_{PMTJC4} = 10\% \times [5.856,40 (-) 4.594,5117]$$

$$CJ_{PMTJC4} = 585,64 (-) 459,45117$$

$$CJ_{PMTJC4} = 126,19$$

$$CA_{PMTJC4} = PMT_{JC} - CJ_{PMTJC3} = 1.388,07 - 126,19$$

$$CA_{PMTJC4} = 1.261,88$$

$$SD_4 = SD_3 - CA_{PMTJC3} = 1.261,88 - 1.261,88$$

$$SD_4 = 0,00$$

Juros sobre a diferença entre os valores jurificados, na forma composta, do capital inicial e soma das prestações anteriores

Momento "m"	Valor da prestação periódica a juros compostos	Capital inicial jurificado na forma composta	Prestação periódica jurificada na forma composta	Soma das prestações periódicas jurificadas na forma composta	Juro sobre PV anterior jurificado	Juro sobre soma das PMTs anteriores jurificadas	Cota de juro composto na prestação sob juros compostos	Cota de amortização na prestação sob juros compostos	Saldo devedor residual sob juros compostos
0		4.400,00							4.400,00
1	1.388,07	4.840,00	1.388,07	1.388,07	440,00	0,00	440,00	948,07	3.451,93
2	1.388,07	5.324,00	1.526,88	2.914,95	484,00	138,81	345,19	1.042,88	2.409,05
3	1.388,07	5.856,40	1.679,57	4.594,52	532,40	291,50	240,90	1.147,17	1.261,88
4	1.388,07	6.442,04	1.847,52	6.442,04	585,64	459,45	126,19	1.261,88	0,00

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Evolução das cotas de amortização sob juros compostos

Ainda é possível demonstrar, por progressão geométrica: sob juros compostos, que cada cota de amortização é igual à primeira multiplicada pela razão “ $q = (1+i\%)^{m-1}$ ” de crescimento determinada pela taxa de juros:

$$CA_{JC1} = PMT - CJ_{JC1}$$

$$PMT = 1.388,07$$

$$CJ_{JC1} = PV \cdot i\% = 4.400,00 \times 10\% = 440,00$$

$$CA_{JC1} = 1.388,07 - 440,00 = 948,07$$

$$CA_{JC2} = CJ_{JC1} - (CA_{JC1} \cdot i\%) = 440,00 - (948,07 \times 10\%) = 1.042,88$$

$$CA_{JC3} = 948,07 \times (1 + 10\%)^{3-1} = 948,07 \times (1 + 10\%)^2 = 1.147,17$$

$$CA_{JC4} = 948,07 \times (1 + 10\%)^{4-1} = 948,07 \times (1 + 10\%)^3 = 1.261,88$$

e

$$CJ_{JCm} = CJ_{JC1} - \{CA_{JC1} \cdot [(1+i\%)^{m-1} - 1]\}$$

$$CJ_{JC2} = 440,00 - \{948,07 \cdot [(1+10\%)^{2-1} - 1]\} = 440,00 - 94,81 = 345,19$$

$$CJ_{JC3} = 440,00 - \{948,07 \cdot [(1+10\%)^{3-1} - 1]\} = 440,00 - 199,09 = 240,90$$

$$CJ_{JC4} = 440,00 - \{948,07 \cdot [(1+10\%)^{4-1} - 1]\} = 440,00 - 313,81 = 126,19$$

ou

$$CJ_{JC2} = CJ_{JC1} - (CA_{JC1} \cdot i\%) = 440,00 - (948,07 \times 10\%) = 440,00 - 94,81 = 345,19$$

$$CJ_{JC3} = CJ_{JC2} - (CA_{JC2} \cdot i\%) = 345,19 - (1.042,88 \times 10\%) = 345,19 - 104,29 = 240,90$$

$$CJ_{JC4} = CJ_{JC3} - (CA_{JC3} \cdot i\%) = 240,90 - (1.147,17 \times 10\%) = 240,90 - 114,71 = 126,19$$

No exemplo ora em análise, o plano inicial de financiamento da Tabela Price é o seguinte:

Momento (m)	Períodos vencidos (n-m)	Prestação PMT	Cota de juros CJ em "m"	Cota de amortização CA em "m"	Saldo devedor SD em "m"
0	4				4.400,00
1	3	1.388,07	440,00	948,07	3.451,93
2	2	1.388,07	345,19	1.042,88	2.409,05
3	1	1.388,07	240,90	1.147,17	1.261,88
4	0	1.388,07	126,19	1.261,88	0,00

Pelo algoritmo de Price, cada cota de juros é igual à multiplicação entre o saldo devedor anterior e a taxa de juros predeterminada. A cota de amortização resulta da subtração entre prestação e cota de juros. E o novo saldo devedor é igual à subtração entre saldo devedor anterior e a cota de amortização.

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Mas, em todo e qualquer sistema de amortização consistente, para apurar o efetivo saldo devedor, em cada momento do prazo do financiamento, não é necessário utilizar fórmulas nem sempre bem compreendidas.

Basta somar as cotas de amortização vencidas!

O saldo devedor é sempre igual à soma das cotas de amortização não pagas ou a diferença entre o capital inicial e a soma das cotas de amortização já pagas.

$$SD_{JC0} = CA_{JC1} + CA_{JC2} + CA_{JC3} + CA_{JC4} = 948,07 + 1.042,88 + 1.147,17 + 1.261,88 = 4.400,00$$

$$SD_{JC1} = CA_{JC2} + CA_{JC3} + CA_{JC4} = 1.042,88 + 1.147,17 + 1.261,88 = 3.451,93$$

$$SD_{JC2} = CA_{JC3} + CA_{JC4} = 1.147,17 + 1.261,88 = 2.409,05$$

$$SD_{JC3} = CA_{JC4} = 1.261,88$$

$$SD_{JC4} = 0,00$$

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Sob juros compostos, saldos devedores também podem ser obtidos pela soma do saldo devedor anterior mais o juro sobre esta verba, da qual deve ser diminuído valor da prestação.

Momento m	Períodos vencidos (n-m)	Juro sobre saldo devedor anterior	Valor da prestação periódica a juros compostos	Saldo devedor
0	4			4.400,00
1	3	440,00	1.388,07	3.451,93
2	2	345,19	1.388,07	2.409,05
3	1	240,91	1.388,07	1.261,88
4	0	126,19	1.388,07	- 0,00

$$SD_{JC0} = 4.400,00$$

$$SD_{JC1} = SD_{JC0} + CJ_{JC1} - PMT_{JC1} = 4.400,00 + 440,00 - 1.388,07 = 3.451,93$$

$$SD_{JC2} = SD_{JC1} + CJ_{JC2} - PMT_{JC2} = 3.451,93 + 345,19 - 1.388,07 = 2.409,05$$

$$SD_{JC3} = SD_{JC2} + CJ_{JC3} - PMT_{JC3} = 2.409,05 + 240,90 - 1.388,07 = 1.261,88$$

$$SD_{JC4} = SD_{JC3} + CJ_{JC4} - PMT_{JC4} = 1.261,88 + 126,19 - 1.388,07 = 0,00$$

CAPÍTULO 15 - *GOLDEN PROOF* OU PROVA REAL: A DIFERENÇA ENTRE SALDOS DEVEDORES SOB JUROS COMPOSTOS

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Mas, se ainda assim, houver incredulidade, uma simples conta reversa esclarecerá definitivamente a questão.

Essa é a “prova real”, “o teste de São Tomé”, a “conta do leigo em matemática”, que dará clareza e finitude ao “problema”.

Independentemente da forma de capitalização, em financiamento a ser quitado mediante prestações periódicas, é de lógica extrema que a diferença entre saldos devedores de momentos consecutivos seja o que foi amortizado da dívida, neste período.

Se, a cada momento desta amortização gradativa, foi paga a prestação, a diferença entre essa parcela e a cota de amortização corresponde à cota de juros contida na prestação.

Então, o “leigo em matemática” reflete.

Se, a juros compostos, a dívida inicial era de 4.400,00, há um mês, e foi paga a prestação de 1.388,07, restou saldo a pagar de 3.451,93. Então, a dívida foi deduzida em 948,07. Consequentemente, diminuído esse valor, na primeira prestação, de 1.388,07, estavam contidos juros de 440,00.

No segundo mês, uma vez paga a prestação de 1.388,07, a dívida ficou em 2.409,05. Se o débito anterior era 3.451,93, foi amortizada a quantia de 1.042,88. Subtraído esse valor da prestação de 1.388,07, os juros nesta 2ª prestação eram de 345,19.

No terceiro mês, houve mais um pagamento da prestação de 1.388,07, e a informação de que o saldo da dívida ficou em 1.261,88. Se o saldo anterior era de 2.409,05, a diferença entre os dois valores, de 1.147,17, corresponde ao valor diminuído do débito, ou seja, a cota de amortização. Efetuada a subtração entre o valor da prestação e da cota de amortização, a diferença nada mais era do que a cota de juros na 3ª prestação, 240,90.

Finalmente, no quarto mês, com o pagamento da 4ª e última prestação, 1.388,07, a dívida foi extinta, havendo informação de que a dívida foi totalmente quitada, com o saldo devedor sendo igual a zero. Conclui-se que a cota de amortização contida na quarta prestação foi de 1.388,07, resultante da diferença entre o saldo devedor anterior, 1.261,88 e o final, zero. Consequentemente, a cota de juros contida nesta quarta e última prestação, 1.388,07, era de 126,19.

CAPÍTULO 16 - COTAS DE JUROS SIMPLES NAS PRESTAÇÕES FIXAS

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Com base no conceito de juros simples, conforme já demonstrado, da base de cálculo, diferença entre os valores jurificados, até o momento anterior, do capital inicial e da soma das prestações, devem ser expurgados ou revertidos os juros anteriores sobre as prestações, a fim de evitar o efeito “juro sobre juro”.

Momento 0

INEXISTE cota de juro sobre capital inicial, prestações e juros anteriores.

Momento 1

No momento anterior, $m = 0$, só há capital inicial, $PV = FV_0 = 4.400,00$, sem prestações nem juros sobre cotas de juro anteriores.

O juro sobre capital inicial é 440,00, exatamente o mesmo da evolução do capital inicial para pagamento em parcela única.

Não há juros reversos sobre prestações anteriores, que não ocorrem no momento $m=0$.

Também não há juros sobre a soma nominal das cotas de juros anteriores, que só ocorrem a partir do momento $m=1$.

A cota líquida de juros, neste momento $m=1$, é a diferença entre 440,00, 0,00 e 0,00, resultando em 440,00, mesmo valor obtido pela multiplicação do saldo anterior, 4.400,00, pela taxa predeterminada de juros, 10%.

Algebricamente:

$$CJ_{PMTJSm} = CJ_{PV \text{ jurificado até } m-1} (-) CJ_{\sum PMTJS \text{ jurificadas até } m-1} (-) J \text{ sobre } \sum CJ \text{ até } m-1]$$

$$CJ_{PMTJS1} = CJ_{PV \text{ jurificado até } 0} (-) CJ_{\sum PMTJS \text{ jurificadas até } 0} (-) J \text{ sobre } \sum CJ \text{ até } 0$$

$$CJ_{PVJS0} = PV \text{ jurificado até } 0 \cdot i\% = 10\% \times \{4.400,00 \times [1 + (10\% \times 0)]\} = 4.400,00 \times 10\%$$

$$CJ_{PVJS0} = 440,00$$

$$CJ_{\sum PMTJS \text{ jurificadas até } 0} = \sum PMTJS \text{ jurificadas até } 0 \cdot i\%$$

INEXISTENTE

$$\text{Juro sobre } \sum CJ \text{ até } 0 = \sum CJ \text{ até } 0 \cdot i\%$$

INEXISTENTE

$$CJ_{PMTJS1} = 10\% \times (4.400,00 - 0,00 - 0,00)$$

$$CJ_{PMTJS1} = 440,00 - 0,00 - 0,00$$

$$CJ_{PMTJS1} = 440,00$$

ou

$$CJ_{PMTJS1} = i\% \cdot [SD_{m-1} (-) \sum CJ_{\text{anteriores}}]$$

$$CJ_{PMTJS1} = 10\% \times (4.400,00 - 0,00) = 10\% \times 4.400,00$$

$$CJ_{PMTJS1} = 440,00$$

ou

$$CJ_{PMTJS1} = i\% \cdot (PV - \sum PMT_{\text{até } m-1})$$

$$CJ_{PMTJS1} = 10\% \times \{4.400,00 - [1.339,13 \times (1-1)]\}$$

$$CJ_{PMTJS1} = 10\% \times [4.400,00 - (1.339,13 \times 0)] = 10\% \times 4.400,00$$

$$CJ_{PMTJS1} = 440,00$$

ou

$$CJ_{PMTJS1} = CJ_{PMTJS1} (-) PMT_{JS} \cdot i\% \cdot (m-1)$$

$$CJ_{PMTJS1} = 440,00 (-) 1.339,13 \times 10\% \times (1-1) = 440,00 (-) 0,00 \times 10\%$$

$$CJ_{PMTJS1} = 440,00 (-) 0,00$$

$$CJ_{PMTJS1} = 440,00$$

$$CA_{PMTJS1} = PMT_{JS} - CJ_{PMTJS2} = 1.339,13 - 440,00$$

$$CA_{PMTJS1} = 899,13$$

$$SD_1 = SD_0 - CA_{PMTJS1} = 4.400,00 - 899,13$$

$$SD_1 = 3.500,87$$

Por progressão aritmética:

Desde o momento zero até o momento anterior: e-nésimo termo do capital inicial em progressão aritmética

$$a_m \text{ PAPV} = a_{1PV} \cdot \{1 + [r \cdot (t_m-1)]\}$$

$$a_1 \text{ PAPV} = a_{1PV} \cdot \{1 + [r \cdot (t_m-1)]\}$$

$$a_1 \text{ PAPV} = 4.400,00 \times \{1 + [10\% \times (0+1-1)]\} = 4.400,00 \times 1,00 = 4.400,00$$

Desde o momento 1 até o momento anterior: soma das prestações em progressão aritmética

$$a_m \text{ PMTJS} = a_{1PMTJS} \cdot \{1 + [r \cdot (t_m-1)]\}$$

INEXISTENTE

$$a_0 \text{ PMTJS} = a_{1PMTJS} \cdot \{1 + [r \cdot (t_m-1)]\}$$

INEXISTENTE

$$S_0 \text{ PAPMTJS} = [(a_1 \text{ PMTJS} + a_1 \text{ PMTJS}) \cdot t_m] / 2$$

INEXISTENTE

Desde o momento 1 até o momento anterior: soma nominal das cotas de juros das prestações anteriores

$$\sum CJ_{PMTJS \text{ até } 0} = \text{INEXISTENTE}$$

$$CJ_{PMTJSm} = i\% \cdot (a_{m-1} \text{ PAPV} - S_{m-1} \text{ PAPMTJS} - \sum CJ_{PMTJS \text{ até } m-1})$$

$$CJ_{PMTJS1} = i\% \cdot (a_1 \text{ PAPV} - S_0 \text{ PAPMTJS} - \sum CJ_{PMTJS \text{ até } 0})$$

$$CJ_{PMTJS1} = 10\% \times (4.400,00 - 0,00 - 0,00)$$

$$CJ_{PMTJS1} = 440,00 - 0,00 - 0,00$$

$$CJ_{PMTJS1} = 440,00$$

$$CA_{PMTJS1} = PMT_{JS} - CJ_{PMTJS1} = 1.339,13 - 440,00$$

$$CA_{PMTJS1} = 899,13$$

$$SD_1 = SD_0 - CA_{PMTJS1} = 4.400,00 - 899,13$$

$$SD_1 = 3.500,87$$

Momento 2

No momento anterior, $m = 1$, o capital inicial jurificado é $FV_{JS1} = 4.840,00$ ($4.400,00 \times 1,1$).

O juro sobre FV_{JS1} , em m_2 , de 484,00, é exatamente o mesmo da evolução do capital inicial para pagamento em parcela única, sem prestações.

Até $m = 1$, há ocorrência de prestação, $PMT_{JS1} = 1.339,13$, que inicia a amortização do financiamento, com juro reverso de 133,913.

E o juro sobre a soma nominal de cotas de juros anteriores resulta de $CJ_{JS1} 440,00 \times 10\% = 44,00$.

A cota líquida de juros, neste momento $m=2$, é a diferença entre 484,00, 133,913 e 44,00, resultando em 306,087, mesmo valor obtido pela multiplicação da taxa de juros predeterminada, 10%, pela diferença, 3.060,87, entre o saldo anterior, 3.500,87, e a soma das cotas de juros anteriores, 440,00.

Algebricamente:

$$CJ_{PMTJSm} = CJ_{PV} \text{ jurificado até } m-1 (-) CJ_{\sum PMTJS} \text{ jurificadas até } m-1 (-) J \text{ sobre } \sum CJ \text{ até } m-1]$$

$$CJ_{PMTJS2} = CJ_{PV} \text{ jurificado até } 1 (-) CJ_{\sum PMTJS} \text{ jurificadas até } 1 (-) J \text{ sobre } \sum CJ \text{ até } 1$$

$$CJ_{PVJS1} = PV \text{ jurificado até } 1 \cdot i\% = 10\% \times \{4.400,00 \times [1 + (10\% \times 1)]\} = 4.840,00 \times 10\%$$

$$CJ_{PVJS1} = 484,00$$

$$CJ_{\sum PMTJS} \text{ jurificadas até } 1 = \sum PMT_{JS} \text{ jurificadas até } 1 \cdot i\%$$

$$CJ_{\sum PMTJS} \text{ jurificadas até } 1 = 1.339,13 \times 10\% = 133,913$$

$$J \text{ sobre } \sum CJ \text{ até } 1 = \sum CJ \text{ até } 1 \cdot i\%$$

$$J \text{ sobre } \sum CJ \text{ até } 1 = 440,00 \times 10\%$$

$$J \text{ sobre } \sum CJ \text{ até } 1 = 44,00$$

$$CJ_{PMTJS2} = 10\% \times (4.840,00 - 1.339,13 - 440,00)$$

$$CJ_{PMTJS2} = 484,00 - 133,913 - 44,00$$

$$CJ_{PMTJS2} = 306,09$$

ou

$$CJ_{PMTJS2} = i\% \cdot [SD_{m-1} (-) \sum CJ_{\text{anteriores}}]$$

$$CJ_{PMTJS2} = 10\% \times (3.500,87 - 440,00) = 10\% \times 3.060,87$$

$$CJ_{PMTJS2} = 306,09$$

ou

$$CJ_{PMTJS2} = i\% \cdot (PV - \sum PMT \text{ até } m-1)$$

$$CJ_{PMTJS2} = 10\% \times \{4.400,00 - [1.339,13 \times (2-1)]\}$$

$$CJ_{PMTJS2} = 10\% \times [4.400,00 - (1.339,13 \times 1)] = 10\% \times 3.060,87$$

$$CJ_{PMTJS2} = 306,09$$

ou

$$\begin{aligned}CJ_{PMTJS2} &= CJ_{PMTJS1} (-) PMT_{JS} \cdot i\% \cdot (m-1) \\CJ_{PMTJS2} &= 440,00 (-) 1.339,13 \times 10\% (2-1) = 440,00 (-) 1.339,13 \times 10\% \\CJ_{PMTJS2} &= 440,00 (-) 133,913 \\CJ_{PMTJS2} &= 306,09\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}CA_{PMTJS2} &= PMT_{JS} - CJ_{PMTJS2} = 1.339,13 - 306,09 \\CA_{PMTJS2} &= 1.033,04\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}SD_2 &= SD_1 - CA_{PMTJS2} = 3.500,87 - 1.033,04 \\SD_2 &= 2.467,83\end{aligned}$$

Por progressão aritmética:

Desde o momento zero até o momento anterior: e-nésimo termo do capital inicial em progressão aritmética

$$\begin{aligned}a_m \text{ PAPV} &= a_{1PV} \cdot \{1 + [r \cdot (t_m-1)]\} \\a_2 \text{ PAPV} &= a_{1PV} \cdot \{1 + [r \cdot (t_m-1)]\} \\a_2 \text{ PAPV} &= 4.400,00 \times \{1 + [10\% \times (1+1-1)]\} = 4.400,00 \times 1,10 = 4.840,00\end{aligned}$$

Desde o momento 1 até o momento anterior: soma das prestações em progressão aritmética

$$\begin{aligned}a_m \text{ PMTJS} &= a_{1 \text{ PMTJS}} \cdot \{1 + [r \cdot (t_m-1)]\} \\a_0 \text{ PMTJS} &= 1.339,13 \\a_1 \text{ PMTJS} &= a_{1 \text{ PMTJS}} \cdot \{1 + [r \cdot (t_m-1)]\} \\a_1 \text{ PMTJS} &= 1.339,13 \times \{1 + [10\% \times (0+1-1)]\} \\a_1 \text{ PMTJS} &= 1.339,13 \times 1,00 \\a_1 \text{ PMTJS} &= 1.339,13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_1 \text{ PAPMTJS} &= [(a_1 \text{ PMTJS} + a_1 \text{ PMTJS}) \cdot t_m] / 2 \\S_1 \text{ PAPMTJS} &= [(1.339,13 + 1.339,13) \times 1] / 2 \\S_1 \text{ PAPMTJS} &= 2.678,26 \times 1 / 2 \\S_1 \text{ PAPMTJS} &= 1.339,13\end{aligned}$$

Desde o momento 1 até o momento anterior: soma nominal das cotas de juros das prestações anteriores
 $\sum CJ_{PMTJS \text{ até } 1} = 440,00$

$$\begin{aligned}CJ_{PMTJSm} &= i\% \cdot (a_{m-1} \text{ PAPV} - S_{m-1} \text{ PAPMTJS} - \sum CJ_{PMTJS \text{ até } m-1}) \\CJ_{PMTJS2} &= i\% \cdot (a_1 \text{ PAPV} - S_1 \text{ PAPMTJS} - \sum CJ_{PMTJS \text{ até } 1}) \\CJ_{PMTJS2} &= 10\% \times (4.840,00 - 1.339,13 - 440,00) \\CJ_{PMTJS2} &= 484,00 - 133,913 - 44,00 \\CJ_{PMTJS2} &= 306,09\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}CA_{PMTJS2} &= PMT_{JS} - CJ_{PMTJS2} = 1.339,13 - 306,09 \\CA_{PMTJS2} &= 1.033,04\end{aligned}$$

$$SD_2 = SD_1 - CA_{PMTJS2} = 3.500,87 - 1.033,04$$

$$SD_2 = 2.467,83$$

Momento 3

No momento anterior, $m = 2$, o capital inicial jurificado é $FV_{JS2} = 5.280,00$ ($4.400,00 \times 1,2$).

O juro sobre FV_{JS2} , em m_2 , de 528,00, é exatamente o mesmo da evolução do capital inicial para pagamento em parcela única, sem prestações.

Até $m = 2$, há ocorrência de duas prestações: $PMT_{JS1} = 1.339,13$, que, jurificada, desde $m = 1$, equivale a 1.473,043 ($1.339,13 \times 1,1$); e $PMT_{JS2} = 1.339,13$, totalizando 2.812,17, acarretando juro reverso de 281,217.

E o juro sobre a soma nominal de cotas de juros anteriores resulta de ($CJ_{JS1} 440,00 + CJ_{JS2} 306,09 = 746,09$) $\times 10\% = 74,609$.

A cota líquida de juros, neste momento $m=3$, é a diferença entre 528,00, 281,217 e 74,609, resultando em 172,174, mesmo valor obtido pela multiplicação da taxa de juros predeterminada, 10%, pela diferença, 1.721,74, entre o saldo anterior, 2.467,83, e a soma das cotas de juros anteriores, 746,09.

Algebricamente:

$$CJ_{PMTJSm} = CJ_{PV} \text{ jurificado até } m-1 (-) CJ_{\sum PMTJS} \text{ jurificadas até } m-1 (-) J \text{ sobre } \sum CJ \text{ até } m-1$$

$$CJ_{PMTJS3} = CJ_{PV} \text{ jurificado até } 2 (-) CJ_{\sum PMTJS} \text{ jurificadas até } 2 (-) J \text{ sobre } \sum CJ \text{ até } 2$$

$$CJ_{PVJS2} = PV \text{ jurificado até } 2 \cdot i\% = 10\% \times \{4.400,00 \times [1 + (10\% \times 2)]\} = 5.280,00 \times 10\%$$

$$CJ_{PVJS1} = 528,00$$

$$CJ_{\sum PMTJS} \text{ jurificadas até } 2 = \sum PMT_{JS} \text{ jurificadas até } 2 \cdot i\%$$

$$CJ_{\sum PMTJS} \text{ jurificadas até } 2 = 2.812,17 \times 10\% = 281,217$$

$$J \text{ sobre } \sum CJ \text{ até } 2 = \sum CJ \text{ até } 2 \cdot i\%$$

$$J \text{ sobre } \sum CJ \text{ até } 2 = (440,00 + 306,09) \times 10\% = 746,09 \times 10\%$$

$$J \text{ sobre } \sum CJ \text{ até } 2 = 74,61$$

$$CJ_{PMTJS3} = 10\% \times (5.280,00 - 2.812,17 - 74,61)$$

$$CJ_{PMTJS3} = 528,00 - 281,217 - 74,61$$

$$CJ_{PMTJS3} = 172,17$$

ou

$$CJ_{PMTJS3} = i\% \cdot [SD_{m-1} (-) \sum CJ_{anteriores}]$$

$$CJ_{PMTJS3} = 10\% \times (2.467,83 - 746,09) = 10\% \times 1.721,74$$

$$CJ_{PMTJS3} = 172,17$$

ou

$$CJ_{PMTJS3} = i\% \cdot (PV - \sum PMT \text{ até } m-1)$$

$$CJ_{PMTJS3} = 10\% \times \{4.400,00 - [1.339,13 \times (3-1)]\}$$

$$CJ_{PMTJS3} = 10\% \times [4.400,00 - (1.339,13 \times 2)] = 10\% \times (4.400,00 - 2.678,26)$$

$$CJ_{PMTJS3} = 172,17$$

ou

$$CJ_{PMTJS3} = CJ_{PMTJS1} (-) PMT_{JS} \cdot i\% \cdot (m-1)$$

$$CJ_{PMTJS3} = 440,00 (-) 1.339,13 \times 10\% \times (3-1) = 440,00 (-) 267,826$$

$$CJ_{PMTJS3} = 440,00 (-) 267,826$$

$$CJ_{PMTJS3} = 172,17$$

$$CA_{PMTJS3} = PMT_{JS} - CJ_{PMTJS2} = 1.339,13 - 172,17$$

$$CA_{PMTJS3} = 1.166,96$$

$$SD_3 = SD_2 - CA_{PMTJS2} = 2.467,83 - 1.166,96$$

$$SD_3 = 1.300,87$$

Por progressão aritmética:

Desde o momento zero até o momento anterior: e-nésimo termo do capital inicial em progressão aritmética

$$a_m \text{ PAPV} = a_1 \text{ PV} \cdot \{1 + [r \cdot (t_m-1)]\}$$

$$a_3 \text{ PAPV} = a_1 \text{ PV} \cdot \{1 + [r \cdot (t_m-1)]\}$$

$$a_3 \text{ PAPV} = 4.400,00 \times \{1 + [10\% \times (2+1-1)]\} = 4.400,00 \times 1,20 = 5.280,00$$

Desde o momento 1 até o momento anterior: soma das prestações em progressão aritmética

$$a_m \text{ PMTJS} = a_1 \text{ PMTJS} \cdot \{1 + [r \cdot (t_m-1)]\}$$

$$a_1 \text{ PMTJS} = 1.339,13$$

$$a_2 \text{ PMTJS} = a_1 \text{ PMTJS} \cdot \{1 + [r \cdot (t_m-1)]\}$$

$$a_2 \text{ PMTJS} = 1.339,13 \times \{1 + [10\% \times (1+1-1)]\}$$

$$a_2 \text{ PMTJS} = 1.339,13 \times 1,10$$

$$a_2 \text{ PMTJS} = 1.473,3043$$

$$S_2 \text{ PAPMTJS} = [(a_1 \text{ PMTJS} + a_2 \text{ PMTJS}) \cdot t_m] / 2$$

$$S_2 \text{ PAPMTJS} = [(1.339,13 + 1.473,3043) \times 2] / 2$$

$$S_2 \text{ PAPMTJS} = 2.812,173 \times 2 / 2$$

$$S_2 \text{ PAPMTJS} = 2.812,173$$

Desde o momento 1 até o momento anterior: soma nominal das cotas de juros das prestações anteriores

$$\sum CJ_{PMTJS} \text{ até } 2 = 746,09$$

$$CJ_{PMTJSm} = i\% \cdot (a_{m-1} \text{ PAPV} - S_{m-1} \text{ PAPMTJS} - \sum CJ_{PMTJS} \text{ até } m-1)$$

$$CJ_{PMTJS3} = i\% \cdot (a_2 \text{ PAPV} - S_2 \text{ PAPMTJS} - \sum CJ_{PMTJS} \text{ até } 2)$$

$$CJ_{PMTJS3} = 10\% \times (5.280,00 - 2.812,173 - 746,09)$$

$$CJ_{PMTJS3} = 528,00 - 281,2173 - 74,609$$

$$CJ_{PMTJS3} = 172,17$$

$$CA_{PMTJS3} = PMT_{JS} - CJ_{PMTJS2} = 1.339,13 - 172,17$$

$$CA_{PMTJS3} = 1.166,9563$$

$$SD_3 = SD_2 - CA_{PMTJS3} = 2.467,83 - 1.166,9563$$

$$SD_3 = 1.300,87$$

Momento 4

No momento anterior, $m = 3$, o capital inicial jurificado é $FV_{JS3} = 5.720,00$ ($4.400,00 \times 1,30$).

A cota de juros sobre FV_{JS3} , em $m = 3$, de 572,00, é exatamente a mesma da evolução do capital inicial para pagamento em parcela única, sem prestações.

Até $m = 3$, há ocorrência de três prestações: $PMT_{JS1} = 1.339,13$, que, jurificada, desde $m = 1$, equivale a 1.606,956 ($1.339,13 \times 1,2$); $PMT_{JS2} = 1.473,043$ ($1.339,13 \times 1,10$); $PMT_{JS3} = 1.339,13$, totalizando 4.419,129, acarretando juro reverso de 441,9129.

E o juro sobre a soma nominal de cotas de juros anteriores resulta de ($CJ_{JS1} 440,00 + CJ_{JS2} 306,09 + CJ_{JS3} 172,17 = 918,26$) $\times 10\% = 91,826$.

A cota líquida de juros, neste momento $m=4$, é a diferença entre 572,00, 441,9129 e 91,826, resultando em 38,261, mesmo valor obtido pela multiplicação da taxa de juros predeterminada, 10%, pela diferença, 382,61, entre o saldo anterior, 1.300,87, e a soma das cotas de juros anteriores, 918,26.

Algebricamente:

$$CJ_{PMTJSm} = CJ_{PV} \text{ jurificado até } m-1 (-) CJ_{\sum PMTJS} \text{ jurificadas até } m-1 (-) J \text{ sobre } \sum CJ \text{ até } m-1$$

$$CJ_{PMTJS4} = CJ_{PV} \text{ jurificado até } 3 (-) CJ_{\sum PMTJS} \text{ jurificadas até } 3 (-) J \text{ sobre } \sum CJ \text{ até } 3$$

$$CJ_{PVJS3} = PV \text{ jurificado até } 3 \cdot i\% = 10\% \times \{4.400,00 \times [1 + (10\% \times 3)]\} = 5.720,00 \times 10\%$$

$$CJ_{PVJS3} = 572,00$$

$$CJ_{\sum PMTJS} \text{ jurificadas até } 3 = \sum PMT_{JS} \text{ jurificadas até } 3 \cdot i\%$$

$$CJ_{\sum PMTJS} \text{ jurificadas até } 3 = 4.419,13 \times 10\% = 441,913$$

$$J \text{ sobre } \sum CJ \text{ até } 3 = \sum CJ \text{ até } 3 \cdot i\%$$

$$J \text{ sobre } \sum CJ \text{ até } 3 = (440,00 + 306,09 + 172,17) \times 10\% = 918,26 \times 10\%$$

$$J \text{ sobre } \sum CJ \text{ até } 3 = 91,826$$

$$CJ_{PMTJS4} = 10\% \times (5.280,00 - 2.812,17 - 74,61)$$

$$CJ_{PMTJS4} = 572,00 - 441,91 - 91,83$$

$$CJ_{PMTJS4} = 38,26$$

ou

$$CJ_{PMTJS4} = i\% \cdot [SD_{m-1} (-) \sum CJ_{anteriores}]$$

$$CJ_{PMTJS4} = 10\% \times (1.300,87 - 918,26) = 10\% \times 382,61$$

$$CJ_{PMTJS4} = 38,26$$

ou

$$CJ_{PMTJS4} = i\% \cdot (PV - \sum PMT \text{ até } m-1)$$

$$CJ_{PMTJS4} = 10\% \times \{4.400,00 - [1.339,13 \times (4-1)]\}$$

$$CJ_{PMTJS4} = 10\% \times [4.400,00 - (1.339,13 \times 3)] = 10\% \times (4.400,00 - 4.017,39)$$

$$CJ_{PMTJS4} = 38,26$$

ou

$$CJ_{PMTJS4} = CJ_{PMTJS1} (-) PMT_{JS} \cdot i\% \cdot (m-1)$$

$$CJ_{PMTJS4} = 440,00 (-) 1.339,13 \times 10\% \times (4-1) = 440,00 (-) 133,913 \times 3$$

$$CJ_{PMTJS4} = 440,00 (-) 401,739$$

$$CJ_{PMTJS4} = 38,26$$

$$CA_{PMTJS4} = PMT_{JS} - CJ_{PMTJS2} = 1.339,13 - 38,26$$

$$CA_{PMTJS4} = 1.300,87$$

$$SD_4 = SD_3 - CA_{PMTJS2} = 1.300,87 - 1.300,87$$

$$SD_4 = 0,00$$

Por progressão aritmética:

Desde o momento zero até o momento anterior: e-nésimo termo do capital inicial em progressão aritmética

$$a_m \text{ PAPV} = a_{1PV} \cdot \{1 + [r \cdot (t_m-1)]\}$$

$$a_4 \text{ PAPV} = a_{1PV} \cdot \{1 + [r \cdot (t_m-1)]\}$$

$$a_4 \text{ PAPV} = 4.400,00 \times \{1 + [10\% \times (2+1-1)]\} = 4.400,00 \times 1,20 = 5.280,00$$

Desde o momento 1 até o momento anterior: soma das prestações em progressão aritmética

$$a_m \text{ PMTJS} = a_{1 \text{ PMTJS}} \cdot \{1 + [r \cdot (t_m-1)]\}$$

$$a_1 \text{ PMTJS} = 1.339,13$$

$$a_3 \text{ PMTJS} = a_{1 \text{ PMTJS}} \cdot \{1 + [r \cdot (t_m-1)]\}$$

$$a_3 \text{ PMTJS} = 1.339,13 \times \{1 + [10\% \times (2+1-1)]\}$$

$$a_3 \text{ PMTJS} = 1.339,13 \times 1,20$$

$$a_3 \text{ PMTJS} = 1.606,956$$

$$S_3 \text{ PAPMTJS} = [(a_1 \text{ PMTJS} + a_2 \text{ PMTJS}) \cdot t_m] / 2$$

$$S_3 \text{ PAPMTJS} = [(1.339,13 + 1.606,956) \times 3] / 2$$

$$S_3 \text{ PAPMTJS} = 2.946,086 \times 3 / 2$$

$$S_3 \text{ PAPMTJS} = 4.419,129$$

Desde o momento 1 até o momento anterior: soma nominal das cotas de juros das prestações anteriores

$$\sum CJ_{PMTJS \text{ até } 3} = 918,26$$

$$CJ_{PMTJSm} = i\% \cdot (a_{m-1} \text{ PAPV} - S_{m-1} \text{ PAPMTJS} - \sum CJ_{PMTJS \text{ até } m-1})$$

$$CJ_{PMTJS4} = i\% \cdot (a_3 \text{ PAPV} - S_3 \text{ PAPMTJS} - \sum CJ_{PMTJS \text{ até } 3})$$

$$CJ_{PMTJS4} = 10\% \times (5.720 - 4.419,129 - 918,26)$$

$$CJ_{PMTJS4} = 572,00 - 441,9129 - 91,826$$

$$CJ_{PMTJS4} = 38,26$$

$$CA_{PMTJS4} = PMT_{JS} - CJ_{PMTJS3} = 1.339,13 - 38,26$$

$$CA_{PMTJS4} = 1.300,87$$

$$SD_4 = SD_3 - CA_{PMTJS4} = 1.300,87 - 1.300,87$$

$$SD_4 = 0,00$$

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Evolução das cotas de amortização sob juros simples

Ainda é possível demonstrar, por progressão aritmética: sob juros simples, a razão de crescimento das cotas de amortização, simultaneamente razão de decréscimo das cotas de juro, é igual ao produto do valor da prestação pela taxa de juros predeterminada.

$$r = PMT_{JS} \cdot \{[1 + (i\% \cdot m)] - 1\}$$

$$\text{em } m=1 \text{ e } i\%=10\%$$

$$r = PMT_{JS} \cdot \{[1 + (0,10 \times 1)] - 1\}$$

$$r = PMT_{JS} \cdot i\%$$

$$r = 1.339,13 \times 10\%$$

$$r = 133,913$$

A cota de juros simples da primeira prestação é SEMPRE igual ao produto entre o capital inicial e a taxa de juros predeterminada.

$$CJ_{JS1} = PV \cdot i\%$$

$$CJ_{JS1} = 4.400,00 \times 10\%$$

$$CJ_{JS1} = 440,00$$

Consequentemente, a cota de amortização na primeira prestação resulta da diferença entre os valores da prestação e da cota de juros simples, é:

$$CA_{JS1} = PMT_{JS} - CJ_1$$

$$CA_{JS1} = 1.339,13 - 440,00$$

$$CA_{JS1} = 899,13$$

Então:

$$CA_{JS2} = CA_{JS1} + r = 899,13 + 133,913 = 1.033,04$$

$$CA_{JS3} = CA_{JS2} + r = 1.033,04 + 133,913 = 1.166,96$$

$$CA_{JS4} = CA_{JS3} + r = 1.166,96 + 133,913 = 1.300,87$$

e

$$CJ_{JS2} = CJ_{JS1} - r = 440,00 - 133,913 = 306,09$$

$$CJ_{JS3} = CJ_{JS2} - r = 306,09 - 133,913 = 172,17$$

$$CJ_{JS4} = CJ_{JS3} - r = 172,17 - 133,913 = 38,26$$

Juros sobre a diferença entre os valores jurificados, na forma simples, do capital inicial e soma das prestações anteriores

Momento "m"	Valor da prestação periódica a juros simples	Diferença entre $\sum$ dos juros ant s/ SD ant e $\sum$ dos juros das diferenças	Juro sobre saldo devedor anterior	Juro da diferença entre $\sum$ dos juros ant s/ SD ant e $\sum$ dos juros das diferenças	Base de cálculo da cota de juros na prestação a juros simples	Cota de juros na prestação a juros simples	Cota de amortização na prestação a juros simples	Saldo devedor residual a juros simples
0								4.400,00
1	1.339,13	0,00	440,00	0,00	4.400,00	440,00	899,13	3.500,87
2	1.339,13	440,00	350,09	44,00	3.060,87	306,09	1.033,04	2.467,83
3	1.339,13	746,09	246,78	74,61	1.721,74	172,17	1.166,96	1.300,87
4	1.339,13	918,26	130,09	91,83	382,61	38,26	1.300,87	- 0,00

Juros sobre a diferença entre os valores jurificados, na forma simples, do capital inicial e soma das prestações anteriores

Momento "m"	Capital inicial jurificado na forma simples	Juro sobre PV anterior jurificado	Soma das prestações periódicas jurificadas na forma simples	Juro sobre soma PMTs anteriores jurificadas	Soma das cotas de juros anteriores	Juro sobre soma das cotas de juros anteriores	Cota de juro na prestação	Cota de amortização na prestação a juros simples	Saldo devedor residual a juros simples
0	4.400,00								4.400,00
1	4.840,00	440,00	1.339,13	-	-	-	440,00	899,13	3.500,87
2	5.280,00	484,00	2.812,17	133,91	440,00	44,00	306,09	1.033,04	2.467,83
3	5.720,00	528,00	4.419,13	281,22	746,09	74,61	172,17	1.166,96	1.300,87
4	6.160,00	572,00	6.160,00	441,91	918,26	91,83	38,26	1.300,87	- 0,00

Comprova-se, assim, que, sob capitalização simples, as cotas de juros, em cada prestação, não são meramente resultantes da multiplicação da taxa predeterminada pelo respectivo saldo devedor anterior diminuído das cotas de juros anteriores, pois este algoritmo nada mais é do que a sintetização de operações matemáticas mais detalhadas, que contemplam a incidência do encargo sobre a compensação entre (1) o capital inicial jurificado até o momento anterior; (2) a soma das prestações anteriores também jurificadas até o momento anterior; e (3) deduzidas, ainda, os juros sobre soma nominal das cotas de juros anteriores.

No exemplo ora em análise, o plano inicial de financiamento sob juros simples é o seguinte:

NUM PARC	Valor da prestação periódica a juros simples	Juro sobre saldo devedor anterior	Soma das cotas de juros anteriores	Juro sobre soma das cotas de juros anteriores	Cota de juros na prestação a juros simples	Cota de amortização na prestação a juros simples	Saldo devedor residual a juros simples
0							4.400,00
1	1.339,13	440,00	-	0,00	440,00	899,13	3.500,87
2	1.339,13	350,09	440,00	44,00	306,09	1.033,04	2.467,83
3	1.339,13	246,78	746,09	74,61	172,17	1.166,96	1.300,87
4	1.339,13	130,09	918,26	91,83	38,26	1.300,87	- 0,00

Pelo algoritmo Simplex, cada cota de juros é igual à multiplicação da taxa predeterminada de juros pela diferença entre o saldo devedor anterior e a soma nominal das cotas de juros anteriores.

A cota de amortização resulta da subtração entre prestação e cota de juros.

E o novo saldo devedor é igual à subtração entre saldo devedor anterior e a cota de amortização.

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Mas, em todo e qualquer sistema de amortização consistente, para apurar o efetivo saldo devedor, em cada momento do prazo do financiamento, não é necessário utilizar fórmulas nem sempre bem compreendidas.

Basta somar as cotas de amortização vencidas!

O saldo devedor é sempre igual à soma das cotas de amortização não pagas ou a diferença entre o capital inicial e a soma das cotas de amortização já pagas.

$$SD_{JS0} = CA_{JS1} + CA_{JS2} + CA_{JS3} + CA_{JS4} = 899,13 + 1.033,04 + 1.166,96 + 1.300,87 = 4.400,00$$

$$SD_{JS1} = CA_{JS2} + CA_{JS3} + CA_{JS4} = 1.033,04 + 1.166,96 + 1.300,87 = 3.500,87$$

$$SD_{JS2} = CA_{JS3} + CA_{JS4} = 1.166,96 + 1.300,87 = 2.467,83$$

$$SD_{JS3} = CA_{JS4} = 1.300,87$$

$$SD_{JS4} = 0,00$$

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Sob juros simples, saldos devedores também podem ser obtidos pela diferença entre (1) o saldo devedor anterior diminuído das cotas de juros anteriores, mais (2) o juro sobre a verba obtida no item 1; menos (3) o valor da prestação.

Momento m	Períodos vencidos (n-m)	Juro sobre saldo devedor anterior	Cota de juros na prestação a juros simples	Valor da prestação periódica a juros simples	Saldo devedor residual a juros simples
0	4				4.400,00
1	3	440,00	440,00	1.339,13	3.500,87
2	2	350,09	306,09	1.339,13	2.467,83
3	1	246,78	172,17	1.339,13	1.300,87
4	0	130,09	38,26	1.339,13	- 0,00

$$SD_{JS0} = 4.400,00$$

$$SD_{JS1} = SD_{JS0} + CJ_{JS1} - PMT_{JS1} = 4.400,00 + 440,00 - 1.339,13 = 3.500,87$$

$$SD_{JS2} = SD_{JS1} + CJ_{JS2} - PMT_{JS2} = 3.500,87 + 306,09 - 1.339,13 = 2.467,83$$

$$SD_{JS3} = SD_{JS2} + CJ_{JS3} - PMT_{JS3} = 2.467,83 + 172,17 - 1.339,13 = 1.300,87$$

$$SD_{JS4} = SD_{JS3} + CJ_{JS4} - PMT_{JS4} = 1.300,87 + 38,26 - 1.339,13 = 0,00$$

CAPÍTULO 17 - *GOLDEN PROOF* OU PROVA REAL: A DIFERENÇA ENTRE SALDOS DEVEDORES SOB JUROS SIMPLES

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

A diferença entre saldos devedores de financiamento, sob juros simples

Se, a juros simples, a dívida inicial era de 4.400,00, há um mês, e foi paga a prestação de 1.339,13, restou saldo a pagar de 3.500,87. Então, a dívida foi deduzida em 899,13. Consequentemente, diminuído esse valor, na primeira prestação, de 1.339,13, estavam contidos juros de 440,00.

No segundo mês, uma vez paga a prestação de 1.339,13, a dívida ficou em 2.467,83. Se o débito anterior era 3.500,87, foi amortizada a quantia de 1.033,04. Subtraído esse valor da prestação de 1.339,13, os juros nesta 2ª prestação eram de 306,09.

No terceiro mês, houve mais um pagamento da prestação de 1.339,13, e a informação de que o saldo da dívida ficou em 1.300,87. Se o saldo anterior era de 2.467,83, a diferença entre os dois valores, de 1.166,96, corresponde ao valor diminuído do débito, ou seja, a cota de amortização. Efetuada a subtração entre o valor da prestação e da cota de amortização, a diferença nada mais era do que a cota de juros na 3ª prestação, 172,17.

Finalmente, no quarto mês, com o pagamento da 4ª e última prestação, 1.339,13, a dívida foi extinta, havendo informação de que a dívida foi totalmente quitada, com o saldo devedor sendo igual a zero. Conclui-se que a cota de amortização contida na quarta prestação foi de 1.300,87, resultante da diferença entre o saldo devedor anterior, 1.300,87 e o final, zero. Consequentemente, a cota de juros contida nesta quarta e última prestação, 1.339,13, era de 38,26.

CAPÍTULO 18 - LIQUIDAÇÃO ANTECIPADA. APURAÇÃO DE SALDOS DEVEDORES OU DE UMA PRESTAÇÃO ESPECÍFICA.

Fato recorrente é a liquidação antecipada dos contratos de financiamento, e, para isso, a praxe é calcular o saldo devedor remanescente, no momento da liquidação, mediante apuração do valor presente das prestações vincendas.

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Sob juros compostos

Considere-se:

- a) o prazo “n”, número total de períodos do contrato;
- b) o momento “m” de ocorrência de cada uma das prestações a serem antecipadas;
- c) o instante “z” em que será feita a liquidação antecipada, o “zeramento” da dívida.

$$PV = 4.400,00$$

$$i\% = 10\%$$

$$n = 4$$

$$PMT_{JC} = 1.388,07$$

Prestação a juros compostos, desjurificada

$$PMT_{JCm} \text{ desjurificada} = PMT_{JC} \cdot \frac{(1 + i\%)^{n-m}}{(1 + i\%)^{n-z}}$$

ou

$$PMT_{JCm} \text{ desjurificada} = PMT_{JC} \cdot (1 + i\%)^{z-m}$$

Valor das prestações vincendas, sob juros compostos, no instante $z = 1$, de um prazo total $n = 4$, para liquidação antecipada do saldo devedor

2ª prestação:

$$PMT_{JC2} \text{ desj} = 1.388,07 \times \frac{(1 + 10\%)^{4-2}}{(1 + i\%)^{4-1}}$$

$$PMT_{JC2} \text{ desj} = 1.388,07 \times \frac{1,21}{1,331}$$

$$PMT_{JC2} \text{ desj} = 1.388,07 \times 0,90909090$$

$$PMT_{JC2} \text{ desj} = 1.261,88$$

3ª prestação:

$$PMT_{JC3} \text{ desj} = 1.388,07 \times \frac{(1 + 10\%)^{4-3}}{(1 + i\%)^{4-1}}$$

$$PMT_{JC3} \text{ desj} = 1.388,07 \times \frac{1,10}{1,331}$$

$$PMT_{JC3} \text{ desj} = 1.388,07 \times 0,17355372$$

$$PMT_{JC2} \text{ desj} = 1.147,17$$

4ª prestação:

$$PMT_{JC2} \text{ desj} = 1.388,07 \times \frac{(1 + 10\%)^{4-4}}{(1 + i\%)^{4-1}}$$

$$PMT_{JC2} \text{ desj} = 1.388,07 \times \frac{1,00}{1,331}$$

$$PMT_{JC2} \text{ desj} = 1.388,07 \times 0,909090$$

$$PMT_{JC2} \text{ desj} = 1.042,88$$

Soma das PMT_{JC2} , PMT_{JC3} e PMT_{JC4} , desjurificadas para $z = 1$

$$1.261,88 + 1.147,17 + 1.042,88 = 3.451,93 \Rightarrow \text{saldo devedor JC em } z = 1$$

Valor das prestações vincendas, sob juros compostos, no instante $z = 2$, de um prazo total $n = 4$, para liquidação antecipada do saldo devedor

3ª prestação:

$$PMT_{JC2} \text{ desj} = 1.388,07 \times \frac{(1 + 10\%)^{4-3}}{(1 + i\%)^{4-2}}$$

$$PMT_{JC2} \text{ desj} = 1.388,07 \times \frac{1,10}{1,21}$$

$$PMT_{JC2} \text{ desj} = 1.388,07 \times 0,90909090$$

$$PMT_{JC2} \text{ desj} = 1.261,88$$

4ª prestação:

$$PMT_{JC3} \text{ desj} = 1.388,07 \times \frac{(1 + 10\%)^{4-4}}{(1 + i\%)^{4-2}}$$

$$PMT_{JC3} \text{ desj} = 1.388,07 \times \frac{1,00}{1,21}$$

$$PMT_{JC3} \text{ desj} = 1.388,07 \times 0,17355372$$

$$PMT_{JC2} \text{ desj} = 1.147,17$$

Soma das PMT_{JC3} e PMT_{JC4} , desjurificadas para $z = 1$

$$1.261,88 + 1.147,17 = 2.409,05 \Rightarrow \text{saldo devedor JC em } z = 2$$

Valor da prestação vincenda, sob juros compostos, no instante $z = 3$, de um prazo total $n = 4$, para liquidação antecipada do saldo devedor

4ª prestação:

$$PMT_{JC4} \text{ desj} = 1.388,07 \times \frac{(1 + 10\%)^{4-4}}{(1 + i\%)^{4-3}}$$

$$PMT_{JC4} \text{ desj} = 1.388,07 \times \frac{1,00}{1,10}$$

$$PMT_{JC4} \text{ desj} = 1.388,07 \times 0,90909090$$

$$PMT_{JC4} \text{ desj} = 1.261,88$$

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Sob juros simples

Considere-se:

- a) o prazo “n”, número total de períodos do contrato;
- b) o momento “m” de ocorrência de cada uma das prestações a serem antecipadas;
- c) o instante “z” em que será feita a liquidação antecipada, o “zeramento” da dívida.

$$PV = 4.400,00$$

$$i\% = 10\%$$

$$n = 4$$

$$PMT_{JS} = 1.339,13$$

Prestação a juros simples, desjurificada

$$\text{PMT}_{\text{JSm desj}} = \text{PMT}_{\text{JS}} \cdot \left\{ 1 - \frac{\{(\text{PV} \cdot i\%) - [\text{PMT}_{\text{JS}} \cdot i\% \cdot (n - m + z)]\}}{\text{PMT}_{\text{JS}}} \right\}$$

ou

$$\text{PMT}_{\text{JSm desj}} = \text{PMT}_{\text{JS}} - (\text{PV} \cdot i\%) + [\text{PMT}_{\text{JS}} \cdot i\% \cdot (n - m + z)]$$

ou

$$\text{PMT}_{\text{JSm desj}} = \text{PMT}_{\text{JS}} \cdot [1 + i\% \cdot (n - m + z)] - (\text{PV} \cdot i\%)$$

Valor das prestações vincendas, sob juros simples, no instante $z = 1$, de um prazo total $n = 4$, para liquidação antecipada do saldo devedor

2ª prestação:

$$\begin{aligned} \text{PMT}_{\text{JS2 desj}} &= 1.339,13 - (4.400,00 \times 10\%) + [1.339,13 \times 10\% \times (4 - 2 + 1)] \\ \text{PMT}_{\text{JS2 desj}} &= 1.339,13 - 440,00 + [1.339,13 \times 10\% \times 3] \\ \text{PMT}_{\text{JS2 desj}} &= 1.339,13 - 440,00 + 401,74 \\ \text{PMT}_{\text{JS2 desj}} &= 1.300,87 \\ \text{ou } \text{PMT}_{\text{JS2 desj}} &= 1.339,13 \times [1 + 10\% \times (4 - 2 + 1)] - (4.400,00 \times 10\%) = 1.300,87 \end{aligned}$$

3ª prestação:

$$\begin{aligned} \text{PMT}_{\text{JS3 desj}} &= 1.339,13 - (4.400,00 \times 10\%) + [1.339,13 \times 10\% \times (4 - 3 + 1)] \\ \text{PMT}_{\text{JS3 desj}} &= 1.339,13 - (4.400,00 \times 10\%) + [1.339,13 \times 10\% \times 2] \\ \text{PMT}_{\text{JS3 desj}} &= 1.339,13 - 440,00 + 267,83 \\ \text{PMT}_{\text{JS3 desj}} &= 1.166,96 \\ \text{ou } \text{PMT}_{\text{JS3 desj}} &= 1.339,13 \times [1 + 10\% \times (4 - 3 + 1)] - (4.400,00 \times 20\%) = 1.166,96 \end{aligned}$$

4ª prestação:

$$\begin{aligned} \text{PMT}_{\text{JS4 desj}} &= 1.339,13 - (4.400,00 \times 10\%) + [1.339,13 \times 10\% \times (4 - 4 + 1)] \\ \text{PMT}_{\text{JS4 desj}} &= 1.339,13 - (4.400,00 \times 10\%) + [1.339,13 \times 10\% \times 1] \\ \text{PMT}_{\text{JS4 desj}} &= 1.339,13 - 440,00 + 133,91 \\ \text{PMT}_{\text{JS4 desj}} &= 1.033,04 \\ \text{ou } \text{PMT}_{\text{JS2 desj}} &= 1.339,13 \times [1 + 10\% \times (4 - 4 + 1)] - (4.400,00 \times 10\%) = 1.033,04 \end{aligned}$$

Soma das PMT_2 , PMT_3 e PMT_4 , desjurificadas para $z = 1$

$$1.300,87 + 1.166,96 + 1.033,04 = 3.500,87 \Rightarrow \text{saldo devedor em } z = 1$$

Valor das prestações vincendas, sob juros simples, no instante $z = 2$, de um prazo total $n = 4$, para liquidação antecipada do saldo devedor

3ª prestação:

$$\begin{aligned} \text{PMT}_{\text{JS3 desj}} &= 1.339,13 - (4.400,00 \times 10\%) + [1.339,13 \times 10\% \times (4 - 3 + 2)] \\ \text{PMT}_{\text{JS3 desj}} &= 1.339,13 - 440,00 + [1.339,13 \times 10\% \times 3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{PMT}_{\text{JS3}} \text{ desj} &= 1.339,13 - 440,00 + 401,74 \\ \text{PMT}_{\text{JS3}} \text{ desj} &= 1.300,87 \\ \text{ou } \text{PMT}_{\text{JS3}} \text{ desj} &= 1.339,13x[1+10\%x(4-3+2)] - (4.400,00x10\%) = 1.300,87 \end{aligned}$$

4ª prestação:

$$\begin{aligned} \text{PMT}_{\text{JS4}} \text{ desj} &= 1.339,13 - (4.400,00x10\%) + [1.339,13 x 10\% x (4-4+2)] \\ \text{PMT}_{\text{JS4}} \text{ desj} &= 1.339,13 - (4.400,00x10\%) + [1.339,13 x 10\% x 2] \\ \text{PMT}_{\text{JS4}} \text{ desj} &= 1.339,13 - 440,00 + 267,83 \\ \text{PMT}_{\text{JS4}} \text{ desj} &= 1.166,96 \\ \text{ou } \text{PMT}_{\text{JS4}} \text{ desj} &= 1.339,13x[1+10\%x(4-3+1)] - (4.400,00x10\%) = 1.166,96 \end{aligned}$$

Soma das PMT₃ e PMT₄, desjurificadas para z = 2

$$1.300,87 + 1.166,96 = 2.467,83 \Rightarrow \text{saldo devedor em } z = 2$$

Valor das prestações vincendas, sob juros simples, no instante z = 3, de um prazo total n = 4, para liquidação antecipada do saldo devedor

4ª prestação:

$$\begin{aligned} \text{PMT}_{\text{JS4}} \text{ desj} &= 1.339,13 - (4.400,00x10\%) + [1.339,13 x 10\% x (4-4+3)] \\ \text{PMT}_{\text{JS4}} \text{ desj} &= 1.339,13 - 440,00 + [1.339,13 x 10\% x 3] \\ \text{PMT}_{\text{JS4}} \text{ desj} &= 1.339,13 - 440,00 + 401,74 \\ \text{PMT}_{\text{JS4}} \text{ desj} &= 1.300,87 \\ \text{ou } \text{PMT}_{\text{JS4}} \text{ desj} &= 1.339,13x[1+10\%x(4-4+3)] - (4.400,00x10\%) = 1.300,87 \end{aligned}$$

PMT₃ desjurificada para z = 3: 1.300,87 => saldo devedor em z = 3

CAPÍTULO 19 - DEMONSTRAÇÃO DAS INCONSISTÊNCIAS DE MÉTODOS DITOS A JUROS SIMPLES

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

INCONSISTÊNCIA DO MÉTODO DE GAUSS

O denominado Método de Gauss, apesar do valor correto da prestação postecipada periódica, de valor fixo, prevê o abstrato “índice ponderado” para o cálculo das cotas de juro contidas em cada prestação.

PV = 4.400,00; i% = 10%; n = 4; m = de 1 até 4

$$\text{Índice ponderado} = \frac{[(PMT_{JS} \cdot n) - PV]}{\text{Soma dos "m"}}$$

$$PMT_{JS} = 1.339,13$$

Soma dos “m”:

$$\sum m = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$PV = 4.400,00$$

$$I. P. = \frac{[(1.339,13 \times 4) - 4.400,00]}{10}$$

$$I.P. = 95,652$$

Conforme este método, a cota de juros da primeira prestação seria de 382,608 (95,652 x 4), o que, de pronto, invalida o cálculo, pois, à exaustão, comprovou-se que, no instante 1, seja a juros simples ou compostos, a primeira cota de juros é sempre resultante da multiplicação do capital inicial pela taxa predeterminada: 4.400,00 x 10% = 440,00.

Em assim sendo, em razão da interdependência entre todas as verbas do sistema, os valores intermediários de cotas de juros e de amortização, e, também, do saldo devedor, pelo Método Gauss são todos incorretos.

Num Parc	VALOR DA PRESTAÇÃO PERIÓDICA	COTA DE JURO NA PRESTAÇÃO	COTA DE AMORTIZAÇÃO NA PRESTAÇÃO	SALDO DEVEDOR RESIDUAL
m	PMT _{JS}	IP . (n-m+1)	PMT - C _{Jm}	SD _{m-1} - C _{Am}
0				4.400,00
1	1.339,13	382,61	956,52	3.443,48
2	1.339,13	286,96	1.052,17	2.391,30
3	1.339,13	191,30	1.147,83	1.243,48
4	1.339,13	95,65	1.243,48	0,00

INCONSISTÊNCIA DO MEJS – MÉTODO DE EQUIVALÊNCIA A JUROS SIMPLES

INOVAÇÃO DISRUPTIVA

Em MEJS, considerando o prazo $n = 4$, taxa de juros $i\% = 10\%$, valor presente $PV = 4.400,00$, momentos de ocorrência das prestações $m = 1$ até 4, de forma única, calcula-se o valor de cada uma das 4 prestações, com base na fórmula

$$\frac{1}{1 + (i\% \cdot m)}$$
$$PMT = \frac{PV}{\frac{1}{1 + (i\% \cdot m1)} + \frac{1}{1 + (i\% \cdot m2)} + \dots + \frac{1}{1 + [i\% \cdot (n - 1)]} + \frac{1}{(1 + i\%) \cdot n}}$$
$$PMT = \frac{4.400,00}{\frac{1}{1 + (10\% \times 1)} + \frac{1}{1 + (10\% \times 2)} + \frac{1}{1 + (10\% \times 3)} + \frac{1}{1 + (10\% \times 4)}}$$
$$PMT = \frac{4.400,00}{\frac{1}{1,10} + \frac{1}{1,20} + \frac{1}{1,30} + \frac{1}{1,40}}$$
$$PMT = \frac{4.400,00}{0,909090 + 0,833333 + 0,800000 + 0,714285}$$
$$PMT = \frac{4.400,00}{3,225940}$$
$$PMT = 1.363,94$$

É pacífico que, **sob juros simples**, o ÚNICO valor futuro do capital inicial de 4.400,00, sob taxa de juros simples de 10% ao período, em 4 períodos, resulta em 6.160,00.

$$FV_{JS} = 4.400,00 \times [1 + (10\% \times 4)] = 4.400,00 \times 1,4000 = 6.160,00$$

Inversamente, o ÚNICO valor presente do montante de 6.160,00, sob taxa de juros simples de 10% ao período, em 4 períodos, resulta em 4.400,00.

$$PV_{JS} = \frac{6.160,00}{1 + (10\% \cdot 4)} = \frac{6.160,00}{1,40} = 4.400,00$$

O valor presente PV da soma das prestações PMT descontadas deve ser exatamente ao capital social PV de 4.400,00.

Pela sistemática Adotada em MEJS, que inicia pelo cálculo das prestações, mediante a fórmula

$$PV = \frac{1.363,94}{\frac{1}{(1 + 10\%) \times 1} + \frac{1}{(1 + 10\%) \times 2} + \frac{1}{(1 + 10\%) \times 3} + \frac{1}{(1 + 10\%) \times 4}}$$

tendo como referência o valor presente, a prestação de 1.363,94 gera o seguinte fluxo de caixa:

$$* \text{ de } m=1 \text{ para } m=0: \frac{1.363,94}{1,10} = 1.239,95$$

$$* \text{ de } m=2 \text{ para } m=0: \frac{1.363,94}{1,20} = 1.136,63$$

$$* \text{ de } m=3 \text{ para } m=0: \frac{1.363,94}{1,30} = 1.049,18$$

$$* \text{ de } m=4 \text{ para } m=0: \frac{1.363,94}{1,40} = 974,24$$

que retorna o valor presente $PV = 4.400,00$:

$$** PV_{PMT} = 1.239,95 + 1.136,63 + 1.049,18 + 974,24 = 4.400,00$$

Por este prisma, o valor da prestação estaria correto, pois acarreta um fluxo de caixa igual ao valor presente, $PV = 4.400,00$, no momento zero.

A operação inversa, na forma linear, deveria permitir que o valor futuro FV da soma das prestações jurificadas seja exatamente ao valor futuro do capital inicial $FV = 6.160,00$, no momento “n”.

O valor futuro das prestações MEJS, de 1.363,94 cada uma, é:

$$* \text{ de } m=1 \text{ para } m=n=4: 1.363,94 \times \{1 + [10\% \times (4-1)]\} = 1.363,94 \times 1,3000 = 1.773,12$$

$$* \text{ de } m=2 \text{ para } m=n=4: 1.363,94 \times \{1 + [10\% \times (4-2)]\} = 1.363,94 \times 1,2000 = 1.636,73$$

$$* \text{ de } m=3 \text{ para } m=n=4: 1.363,94 \times \{1 + [10\% \times (4-3)]\} = 1.363,94 \times 1,1000 = 1.500,33$$

$$* \text{ de } m=4 \text{ para } m=n=4: 1.363,94 \times \{1 + [10\% \times (4-4)]\} = 1.363,94 \times 1,0000 = 1.363,94$$

$$** 1.847,52 + 1.679,57 + 1.526,88 + 1.388,07 = 6.274,12$$

Constata-se que o valor da prestação $PMT = 1.363,94$ não atende, concomitantemente, às duas exigências de $PV = 4.400,00$ e $FV = 6.160,00$.

Pelo sistema MQJS / SIMPLEX, havia sido obtido o valor da prestação $PMT = 1.339,13$, que resulta no valor futuro $FV = 6.160,00$, na soma do valor futuro das prestações:

* PMT_{JS1} , jurificação linear, de $m=1$ para $m=n=4$:

$$1.339,13 \times \{1 + [10\% \times (4-1)]\} = 1.339,13 \times 1,3000 = 1.740,87$$

* PMT_{JS2} , jurificação linear, de $m=2$ para $m=n=4$:

$$1.339,13 \times \{1 + [10\% \times (4-2)]\} = 1.339,13 \times 1,2000 = 1.606,96$$

* PMT_{JS3} , jurificação linear, de $m=3$ para $m=n=4$:

$$1.339,13 \times \{1 + [10\% \times (4-3)]\} = 1.339,13 \times 1,1000 = 1.500,33$$

* PMT_{JS4} , jurificação linear, de $m=4$ para $m=n=4$:

$$1.339,13 \times \{1 + [10\% \times (4-4)]\} = 1.339,13 \times 1,0000 = 1.339,13$$

$$** FV_{JS} = 1.740,87 + 1.606,96 + 1.473,04 + 1.339,13 = 6.160,00$$

Na metodologia MEJS, utilizando o valor da prestação obtido em MQJS/SIMPLEX, $PMT = 1.339,13$, obtém-se valor presente menor do que o capital inicial, de 4.400,00.

Momento m	Períodos vencidos (n-m)	Valor da prestação periódica a juros simples	Fator do valor presente (numerador)	Soma dos valores desjurificados das prestações na forma simples, até o prazo "0"
0	4			
1	3	1.339,13	1,1000	1.217,39
2	2	1.339,13	1,2000	1.115,94
3	1	1.339,13	1,3000	1.030,10
4	0	1.339,13	1,4000	956,52
Σ PMTs desjurificadas em 0				4.319,96

$$PMT_{JS1}, \text{ diretamente de } m=1 \text{ até } m=0: PMT_{JS1} = \frac{1.339,13}{1 + (10\% \times 1)} = \frac{1.339,13}{1,10} = 1.217,39$$

$$PMT_{JS2}, \text{ diretamente de } m=2 \text{ até } m=0: PMT_{JS2} = \frac{1.339,13}{1 + (10\% \times 2)} = \frac{1.339,13}{1,20} = 1.115,94$$

$$PMT_{JS3}, \text{ diretamente de } m=3 \text{ até } m=0: PMT_{JS3} = \frac{1.339,13}{1 + (10\% \times 3)} = \frac{1.339,13}{1,30} = 1.030,10$$

$$PMT_{JS4}, \text{ diretamente de } m=4 \text{ até } m=0: PMT_{JS4} = \frac{1.339,13}{1 + (10\% \times 4)} = \frac{1.339,13}{1,40} = 956,52$$

$$PV = 1.217,39 + 1.115,94 + 1.030,10 + 956,52 = 4.319,95$$

Mediante a sistemática MQJS/SIMPLEX, a PMT = 1.339,13 resulta no valor presente, PV = 4.400,00, na soma do valor presente das prestações é:

* PMT_{JS1}, desjurificação linear, diretamente de m=1 até m=0:

$$1.339,13 \times \frac{1 + [10\% \times (4-1)]}{1 + (10\% \times 4)} = 1.339,13 \times \frac{1,30}{1,40} = 1.243,48$$

* PMT_{JS2}, desjurificação linear, diretamente de m=2 até m=0:

$$1.339,13 \times \frac{1 + [10\% \times (4-2)]}{1 + (10\% \times 4)} = 1.339,13 \times \frac{1,20}{1,40} = 1.147,83$$

* PMT_{JS3}, desjurificação linear, diretamente de m=3 até m=0:

$$1.339,13 \times \frac{1 + [10\% \times (4-3)]}{1 + (10\% \times 4)} = 1.339,13 \times \frac{1,10}{1,40} = 1.052,17$$

* PMT_{JS4}, desjurificação linear, diretamente de m=4 até m=0:

$$1.339,13 \times \frac{1 + [10\% \times (4-4)]}{1 + (10\% \times 4)} = 1.339,13 \times \frac{1,00}{1,40} = 956,52$$

$$** 1.243,48 + 1.147,83 + 1.052,17 + 956,52 = 4.400,00$$

Constatações:

1. Pelas diferentes metodologias, em MEJS e MQJS/SIMPLEX, os fluxos de caixa, dos dois valores diferentes de prestação, desjurificados para o momento 0, acarretam o mesmo resultado, ou seja, o valor presente, de 4.400,00.

2. A mecânica de apuração do valor da prestação em MEJS, PMT = 1.363,94, não resulta no valor futuro FV = 6.160,00.

3. A mecânica de apuração do valor da prestação em MQJS/SIMPLEX, PMT = 1.339,13, resulta no valor futuro FV = 6.160,00.

Ou seja, mesmo que a desjurificação das prestações, pelas formas sugeridas, em cada método, se iguale ao valor presente PV = 4.400,00, a jurificação de MEJS resulta em FV = 6.274,12, mais do que o valor correto do valor futuro, FV = 6.160,00, que é plenamente atendido pela PMT = 1.339,13.

Conclusões:

a) A mecânica de cálculos em MEJS acarreta resultados incorretos, neste caso, maior do que o efetivamente devido, tornando inconsistente a sistemática.

b) Sob juros simples, a prestação de 1.339,13 atende concomitantemente às duas exigências: (b.1) o valor presente PV_{JS} da soma das prestações PMT descontadas é exatamente igual ao capital social PV de 4.400,00; (b2) o valor futuro FV_{JS} da soma das prestações jurificadas é exatamente igual ao valor futuro do capital social $FV_{JS} = 6.160,00$.

Deste modo, cabe considerar que não há sentido em se apurar o valor da prestação somente em relação ao valor presente, tal como em MEJS, ainda mais utilizando operação matemática inválida, deixando de, também, concomitantemente, atender à necessidade de que o fluxo de caixa destas parcelas deve corresponder ao valor futuro, no final do prazo.

Essas diferenças invalidam o Método MEJS, sendo desnecessário, por ora, analisar as demais incongruências da sistemática, que, a propósito, de forma absurda, contrária aos princípios da Matemática Financeira, resulta em juros crescentes, ou seja, quanto mais se paga, mais os juros crescem.

Assim, pois, a prestação correta, conforme já havia sido apurada em MQJS / SIMPLEX, é $PMT = 1.339,13$, e não 1.363,94.

Oportuno, também, considerar que, tal como já analisado no capítulo sobre o valor presente das prestações a juros simples, a expressão

$$\frac{1}{1 + (i\% \cdot m)}$$

não corresponde à forma simplificada de

$$\frac{1 + [i\% \cdot (n - m)]}{1 + (i\% \cdot n)}$$

ou

$$1 - \frac{i\% \cdot m}{1 + (i\% \cdot n)}$$

Portanto, a despeito do que se encontra em muitos livros e artigos, no denominado MEJS – Método de Equivalência (dito) a Juro Simples (SAL, SPCJS, SACS / SMC), a operação de simplificação, que é válida com juros compostos, não é aplicável sob o prisma linear, com juros simples.

CAPÍTULO 20 - CONCLUSÃO

Com base no conteúdo retro exposto, pode-se concluir:

1. A Tabela Price contempla juros compostos, juros sobre juros, capitalização de juros na forma composta, expressões que se equiparam e correspondem ao conceito de *anatocismo*, conforme se constata na origem etimológica do termo, referida no Vocabulário Jurídico do STJ – Superior Tribunal de Justiça, que expressa o entendimento em seus julgados.

2. São equivocados os entendimentos de conceituados estudiosos, que se alternam em afirmar ser impossível e inexistir viabilidade como construir sistemas de amortização em capitalização linear de juros, ou que o regime de juros simples não comporta fracionamento do prazo. A incorporação e o cálculo de juros simples prescindem de fórmulas mirabolantes e quase ininteligíveis, índices ponderados, artifícios de cálculo, abstrações, teorias, sofismas ou convenções sem fundamento técnico.

3. A Matemática Financeira – ramo específico da Matemática Pura – tal como ocorre com os juros compostos, sem se caracterizar escolha aleatória ou abstração, comprova a viabilidade e a cindibilidade dos sistemas lineares de amortização, em especial o MQJS / SIMPLEX; e, assim, permite elaborar conclusões de forma muito consequente, fundamentada, responsável e consistente.

4. À luz do que dispõe o Pentateuco VDT, quanto a sistemas de amortização ditos a juros simples, com prestações postecipadas periódicas, com valor fixo:

4.1. o Método de Gauss, que utiliza o artifício do índice ponderado como fator de incorporação de juros, apresenta o valor correto para a prestação fixa sob juros simples, mas há incorreções nos valores das cotas de juro e de amortização contidas nas prestações, assim como os saldos intermediários;

4.2. o MEJS - Método de Equivalência a Juros Simples, também denominado de (4.2.1.) SAL – Sistema de Amortização Linear, ou (4.2.2.) SPCJS – Sistema de Prestações Constantes a Juros Simples ou, ainda, (4.2.3.) SACS / SMC – Sistema de Amortização com Capitalização Simples / Sistema de Múltiplos Contratos, apresenta valor de prestação fixa maior do que o correto, e isso determina que estão erradas as cotas de juro crescentes e de amortização decrescentes contidas nas prestações, e os saldos intermediários (exceto a cota de juros da primeira prestação).

5. O MQJS / SIMPLEX é o método adequado, sob juros simples ou lineares, para, simultânea e cumulativamente, expressar a cindibilidade e o fracionamento do prazo, obter os valores corretos das prestações de valor fixo e periodicidade constante, bem como das cotas de juros e de amortização contidas em cada parcela, e, por consequência, dos saldos devedores, inicial, intermediários e final.

6. O MQJS / SIMPLEX atende os artigos 354 e 368 do Código Civil, obedece “a lei do valor do dinheiro no tempo” - cláusula pétrea da Matemática Financeira, e contempla a lógica das progressões aritméticas. Não só na evolução do valor presente para o valor futuro, e no regresso ao capital inicial, mas, também, na apuração dos saldos devedores, sob diversos prismas e formas, inclusive para casos de liquidação antecipadas de todas, algumas ou uma somente das prestações vincendas. E, ainda, o cálculo das cotas de juro e de amortização contidas em cada prestação, também, sob aspectos e critérios que asseguram a consistência a exatidão da metodologia.

7. Inclusive, a propósito, cabe dizer que, após curso ministrado, na Academia Judicial, em abril de 2023, a Contadoria Estadual do Tribunal de Justiça de Santa Catarina adotou o MQJS / SIMPLEX como o sistema padrão de amortização a juros simples, com prestações postecipadas periódicas, de valor fixo, com referendo da Corte nos processos TJSC – 5068127-22.2024.8.24.0000/SC, 5029469-26.2024.8.24.0000/SC, e 5016927-73.2024.8.24.0000/SC. Identicamente, o Tribunal de Justiça do Estado de Goiás reconheceu o MQJS / SIMPLEX, no processo TJGO 5608025-08.2020.8.09.0011.

8. Eis a Matemática Financeira Disruptiva (MFD), que aborda clinicamente os sistemas de amortização, sob juros compostos e simples, e inova com a Metodologia Simplex, fundamentada nos postulados do Pentateuco VDT.

9. Tenho sido contemplado com minha evolução nos estudos feitos sobre Matemática Financeira, Perícia e Direito Bancário. Também, com o que pude receber e compartilhar com milhares de colegas e parceiros, muitos com quem criei amizade. Constante e profícua interlocução. Pura e honesta troca de energias positivas, relação saudável de ensino e aprendizagem. Mas destaco o que, em 17 de maio de 2025, em troca de ideias sobre o tema, recebi em mensagem particular do querido e consagrado professor José Dutra Vieira Sobrinho, a quem admirei e estudei por décadas, e, após alguns encontros virtuais e presenciais, fiquei muito mais seu fã. Gize-se que temos profundas divergências técnicas, mas o que norteia nosso debate é o respeito mútuo. Honra, alegria e gratidão com o que ele me escreveu: “... só existe uma única pessoa no planeta terra, com conhecimento e honestidade intelectual suficientes para comprovar se você está certo ou equivocado nas teses que defende: esse cara seguramente é você!” Realização momentânea. Missão cumprida, mas apenas parcialmente. Estímulo para continuar, sempre. Como diz a canção: “é preciso estar atento e forte, não temos tempo de temer a morte!”

10. Bons estudos. Fico disponível para interlocução. Aprenderemos juntos.

EM TEMPO:

Além do MQJS / SIMPLEX, também elaborei materiais sobre:

a) SAC SIMPLEX – Sistema de Amortização Constante à luz da Metodologia Simplex, com prestações decrescentes, sob juros simples, que impugna e corrige o SAC JS – Sistema de Amortização Constante (dito) a Juros Simples;

b) MAJS SIMPLEX - Método de Amortização a Juros Simples à luz da Metodologia Simplex, com prestações crescentes, que contrapõe e ajusta o MAJS - Método de Amortização (dito) a Juros Simples;

c) Métodos de amortização sob juros simples e compostos, COM CAPITALIZAÇÃO DIÁRIA DE JUROS (SÉRIES NÃO PERIÓDICAS), prazo de carência, parcelas balão, correção monetária;

d) Métodos de amortização com juros híbridos, em especial o MPG – Método Pacheco Gonzalez, aplicável à capitalização anual, a teor do que consta na Lei da Usura e constava no artigo 591 do Código Civil até 28/6/2024, que ainda tem e terá aplicação, e será útil e necessário, por muitos anos em milhares de contratos e processos.

CURRICULUM VITAE DO AUTOR

Alceu André Hübbe Pacheco. Contador: 1997 – FUCRI – Fundação Educacional de Criciúma / UNESC – Universidade do Extremo Sul Catarinense - Criciúma / Araranguá – SC. CRCSC – Conselho Regional de Contabilidade de Santa Catarina sob o número 021807/O-4. Regular perante o CNPC – Cadastro Nacional de Peritos Contábeis sob o número 3902. Perito judicial e assistente técnico extrajudicial, em matéria financeira, especialmente contratos bancários e imobiliários: 1997/... Direito: 1997 – UNISUL – Universidade do Sul de Santa Catarina / Ânima Educação – Tubarão / Araranguá – SC - OAB/SC 12937. Advogado militante na área cível, empresarial, imobiliária, de família e sucessões: 1999/.... Advogado do Banco do Brasil S/A e do BESC – Banco do Estado de Santa Catarina: 2000/2004. Membro da Comissão Estadual de Direito Bancário da OAB/SC: 2025/.... Consultor jurídico-financeiro e advogado gestor em microcrédito produtivo e orientado: 2007/... Administrador e inventariante judicial. Graduado em Administração Pública e Administração de Empresas: 1977 – UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Porto Alegre - RS - CRA/SC 550. Pós-graduação em Perícia e Direito Bancário (MBA) – IBCAPPA - Instituto Brasileiro de Consultoria, Auditoria, Perícias, Projetos e Avaliações / Faculdade Sul da América – Goiânia – GO. Autor dos livros “Juro que é simples!” (2020) e “Heureka!” (2023); coautor do livro “Perícia Bancária – casos práticos” (2021). Criador da Matemática Financeira Disruptiva aplicada à Perícia Sistêmica e da Metodologia Simplex, com abordagem jurídica integrada. Membro da Comissão de Perícias do CRCES: 2024/2025. Sócio e fundador da APCESC – Associação dos Peritos Contábeis do Estado de Santa Catarina: 2023/.... Professor de cálculos financeiros em cursos de MBAs de Perícia e Direito Bancário; e Perícia Contábil & Compliance: 2022/... Palestrante, debatedor e painelistas em eventos sobre Matemática Financeira, Perícia e Direito Bancário. Instrutor em Matemática Financeira voltada a Cálculos Bancários – Academia Judicial – TJSC: agosto de 2022 e abril 2023. Membro da Comissão de Perícias do CRCSC: 2023/2024. Autor e desenvolvedor de sistemas de amortização e métodos pioneiros e inéditos em contratos bancários e imobiliários (juros simples, compostos e híbridos; capitalização diária de juros): apuração dos saldos devedores, intermediários e final, pelo seu valor efetivo, em obediência à regra do “valor do dinheiro no tempo”, resultante da diferença entre o capital inicial ‘jurificado’ e as prestações anteriores também ‘jurificadas’; MQJS – Método de Quitação a Juros Simples ou SIMPLEX; Método Pacheco-Gonzalez, também denominado MPG, PacGon ou SimpComp (sistema de amortização com capitalização híbrida, mantida a cláusula de série uniforme de prestações periódicas; capitalização diária de juros: aperfeiçoamento das séries não periódicas a juros compostos - SNPJC; desenvolvimento das Séries Não Periódicas a juros simples – SNPJS; e, sob a ótica SIMPLEX, de cálculos corretivos dos métodos comprovadamente inconsistentes (totalmente: MAJS; MEJS / SAL / SPCJS; parcialmente: SACJS e GAUSS). Voluntário em diversos movimentos, instituições, entidades, associações, sindicato patronal e organizações não governamentais de Araranguá e Região da AMESC. Ex-Presidente da ACIVA – Associação Empresarial de Araranguá e Extremo Sul Catarinense, entre 2013 e 2014. Dados de contato: Endereço residencial: Av. Engenheiro Mesquita, 1450 – Bairro Coloninha - CEP 88.906-734 - Araranguá – SC. Endereço profissional: Rua Caetano Lummertz, 115 – Sala 806 – Edifício Vittá – Centro – CEP 88.900-045 - Araranguá – SC. Telefone / whatsapp: (048) 996.566.905. e-mail: alceu.pacheco@hotmail.com ou alceu.a.h.pacheco@gmail.com. Instagram: @alceuahpacheco ou @juro.que.e.simples ou heureka.pentateucovdt Facebook: <https://www.facebook.com/alceu.a.h.pacheco> LinkedIn: <https://www.linkedin.com/in/alceu-andré-hübbe-pacheco-34482345/> X (Twitter): @alceuahpacheco Endereço alternativo: Rua Professor Hermínio Jaques, 54 – Aptº 404 – Centro - CEP 88.015-180 – Florianópolis – SC.

AGOSTO/2026

BIBLIOGRAFIA

FARO, Clóvis de; LACTERMACHER, Gerson. Sistema de Prestações Constantes no Regime de Juros Simples. São Paulo, FGV/EPGE 831 ISSN 0104-8910, outubro de 2022.

<https://repositorio.fgv.br/items/70df3fe8-4622-4bbc-9c88-4bd06efcb160> Acesso em 14/9/2025.

FUGIMOTO, Cassio Eliakim; PASSOS, Rodrigo; TIMI, Sonia Regina Ribas. Tabela Price e a discussão no judiciário. Curitiba: Rede do Consumidor, 2016.

LOSSO, Rodrigo de; SANTOS, José Carlos de Souza. Autópsia de um Mito: Dissecando a Falácia do Anatocismo em Sistemas de Amortização. São Paulo:

https://www.academia.edu/105358374/Autopsy_of_a_Myth_Dissecting_the_Anatocism_Fallacy_in_Amortization_Systems 28/7/2023. Acesso em 14/9/2025.

NOGUEIRA, José Jorge Meschiatti. Tabela Price, Mitos e Paradigmas. 3ª Edição. Campinas: Millenium, 2013.

PACHECO, Alceu André Hübbe. “Juro que é simples!”, Clube de Autores, Araranguá, 1ª edição revista e ampliada, 2020.

PACHECO, Alceu André Hübbe. “Heúreka! – Descobertas e Revelações”, Clube de Autores / IBCAPPA, Araranguá, 1ª edição, 2023.

ROVINA, Edson. Uma Nova Visão da Matemática Financeira. 2ª Edição (póstuma). Campinas: Clube de Autores, 2019/2020.

SANDRINI, Jackson Ciro; CHEROBIM, Ana Paula Mussi Szabo. Capitalização de juros em renegociação de dívidas. Curitiba: Juruá, 2016.

SANDRINI, Jackson Ciro. Anatocismo e os negacionistas de uma ciência exata! Curitiba, APEPAR, www.aepar.org.br/wp-content/uploads/2025/03/ANATOCISMO-E-OS-NEGACIONISTAS-DE-UMA-CIENCIA-EXATA.pdf, 5 de março de 2025. Acesso em 14/9/2025.

SILVA, De Plácido e. Vocabulário Jurídico. 32ª Edição. Rio de Janeiro: Forense, 2016.

SILVA, Orivam Ibiapina da. Anatocismo: uma prova da sua inexistência no Sistema de Amortização Francês (Tabela Price). Brasília: Universidade de Brasília, 2020.

http://repositorio2.unb.br/bitstream/10482/39942/1/2020_OrivamIbiapinadaSilva.pdf Acesso em 14/9/2025.

VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. Matemática Financeira, Ed. Atlas, São Paulo, 8.ª edição, 2018.

VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. Sistema de Amortização Linear, LinkedIn, 9 de março de 2022. <https://www.linkedin.com/pulse/sal-sistema-de-amortiza%C3%A7%C3%A3o-linear-jos%C3%A9-dutra-vieira-sobrinho/> Acesso em 14/9/2025.

ZIESEMER, Adriel Mota. Tabela Price: onde está a capitalização dos juros? Pelotas: CRC/RS - Revista Brasileira de Contabilidade, 2020. <https://www.youtube.com/watch?v=5kr92NWI1HM> (1/7/2024) e <https://www.youtube.com/watch?v=nMR-7XBOWyU> (8/7/2024). Acesso em 14/9/2025.